THÉORIE GÉNÉRALE

DES

FONCTIONNELLES

OUVRAGES EN PRÉPARATION

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONNELLES

Tome II. — *Composition. Équations intégro-différentielles et aux dérivées fonctionnelles. Généralisations des fonctions analytiques.*

Tome III. — *Compléments et applications.*

COLLECTION DE MONOGRAPHIES SUR LA THÉORIE DES FONCTIONS
PUBLIÉE SOUS LA DIRECTION DE M. ÉMILE BOREL

THÉORIE GÉNÉRALE DES FONCTIONNELLES

PAR

Vito VOLTERRA
Membre de l'Institut

Joseph PÉRÈS
Professeur à la Sorbonne

TOME PREMIER

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONNELLES
THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

Préface de Vito VOLTERRA



PARIS
GAUTHIER-VILLARS, ÉDITEUR
LIBRAIRE DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE
55, Quai des Grands-Augustins, 55
—
1936

PRÉFACE

Mes *Leçons sur les équations intégrales et intégro-différentielles* publiées en 1913 ([1]) étant épuisées, l'éditeur m'a proposé d'en faire une nouvelle édition. Mais leur réimpression, même avec des adaptations, n'aurait pas fourni un ouvrage au courant des progrès réalisés par l'Analyse moderne. Les travaux sur le sujet, publiés pendant les vingt dernières années, ont été trop nombreux pour qu'il ne devînt pas nécessaire de modifier substantiellement tout l'ouvrage.

D'autre part le concept de traiter les équations intégrales et intégro-différentielles comme des chapitres de la Théorie des fonctionnelles était déjà amorcé dans mes *Leçons* de 1913. Le développement ultérieur de ces théories a révélé des rapports toujours plus étroits entre leurs diverses branches, de sorte qu'un ouvrage consacré aux équations intégrales et intégro-différentielles, qui aurait négligé ces rapports et abandonné le concept précédent, présenterait de profondes lacunes. Il ne suivrait pas l'ordre naturel du sujet et il masquerait l'évolution historique de la théorie ([2]), qui a amené aux méthodes

([1]) *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* (Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1913).

([2]) J'ai exposé cette évolution historique dans la première de mes *Leçons sur les fonctions de lignes* (Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1913).

employées aujourd'hui pour traiter les équations intégrales dans toute leur généralité. Ces méthodes sont en effet les mêmes que celles qui ont servi au passage des fonctions ordinaires aux fonctionnelles; il a suffi de les appliquer aux équations algébriques. Dans l'un et l'autre cas on se base sur l'application systématique et uniforme du principe dit « principe de passage du discontinu au continu ».

C'est ce procédé que j'ai introduit et développé dès mes premiers travaux sur les fonctionnelles et sur les équations intégrales. J'y ai insisté dans tous mes travaux suivants et il a été employé par ceux qui se sont occupés plus tard des mêmes sujets. Il était donc logique de penser à élargir le plan des *Leçons* de 1913, en transformant l'ouvrage dans une exposition générale de la Théorie des fonctionnelles qui se rattacherait très intimement à l'ordre d'idées en question.

Or un ouvrage ainsi conçu existait déjà, car, dans les Leçons tenues à Madrid en 1926, j'avais exposé diverses branches de la Théorie des fonctionnelles en donnant un développement étendu à la partie consacrée aux équations intégrales et intégro-différentielles. Ce volume, publié d'abord en espagnol et, quelques années après, revisé et traduit en anglais [1], offrait donc le plan d'après lequel il fallait composer le nouveau traité. Mais il n'en donnait que le canevas, parce que l'exposé y était limité souvent aux résultats; les démonstrations et les développements de calcul nécessaires pour les obtenir étant la plupart du temps négligés. Plutôt qu'un traité complet, il était un aperçu général des différentes théories, permettant de

---

[1] *Teoria de las funcionales y de las equaciones integrales e integro-differenciales* (Madrid, 1927). *Theory of functionals and integral and integro-differential equations* (London and Glasgow, Blackie and Son, éditeurs, 1930).

s'orienter dans l'ensemble des méthodes et des propositions fondamentales. Pour avoir un traité complet, il fallait y reprendre les divers détails.

C'est ce que justement M. Pérès et moi-même nous nous sommes proposé de faire par le présent ouvrage. Je suis sincèrement reconnaissant à M. Pérès, qui connaît parfaitement toutes les branches de la théorie des équations intégrales et de la théorie des fonctionnelles et qui a apporté à ces parties de l'Analyse d'importantes contributions originales, de s'être associé à moi dans cette entreprise.

L'ouvrage sera divisé en trois volumes. Le premier comprend les généralités sur la théorie des fonctionnelles et sur les extensions les plus récentes, puis l'exposé de la théorie des équations intégrales, mis à jour et faisant connaître les résultats modernes à côté des plus anciennes recherches.

Le second volume débutera par la théorie de la composition, qui se rattache très intimement à celles des équations intégrales. Nous avons déjà publié sur ce sujet un traité spécial [1] et nous insisterons surtout sur les résultats nouveaux. Les Chapitres suivants seront consacrés aux équations intégro-différentielles et aux dérivées fonctionnelles qui constituent la suite naturelle des équations intégrales. La dernière partie du second volume sortira du cadre des théories précédentes : elle envisagera l'application des fonctionnelles à l'extension de la théorie des fonctions analytiques.

Le troisième volume concernera les compléments des théories déjà développées et les applications; nous y exposerons en particulier les théories modernes du Calcul des variations, les

---

[1] *Leçons sur la composition et les fonctions permutables* (Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1924).

fonctionnelles analytiques et les applications à la Mécanique, à la Physique mathématique, à la Biologie, à la Statistique et à l'Économie politique.

La rédaction du présent volume a été faite par M. Pérès en se basant sur les deux ouvrages cités.

La première partie (Généralités sur les fonctionnelles) se réfère au Chapitre I de ma *Theory of functionals*, avec des extensions qui concernent particulièrement les travaux de M. Fréchet sur les ensembles abstraits et l'Analyse générale, ceux de M. P. Lévy, dont les *Leçons d'analyse fonctionnelle* sont souvent citées, ceux enfin de M. F. Riesz, à qui l'on doit nombre de mémoires fondamentaux. Bien des développements appartiennent à M. Pérès et je signale ici l'exposé sur l'intégrale de Lebesgue, suivant une méthode dont le principe a été donné par M. F. Riesz, divers points de la théorie des différentielles et, en particulier, la forme générale du principe d'inversion des différentiations fonctionnelles.

J'ai l'agréable devoir de remercier ici, en mon nom et de la part de M. Pérès, M. L. Tonelli qui nous a accordé son précieux concours en rédigeant la seconde partie du Chapitre II où est exposée sa méthode pour l'étude de l'extrémum d'une intégrale simple.

Dans la seconde partie de l'ouvrage (Équations intégrales), on a repris les questions traitées au Chapitre II de ma *Theory of functionals* et dans mes *Leçons* de 1913. Il a été tenu compte des principaux Mémoires et exposés didactiques, tels que ceux de Hilbert, E. Schmidt, Heywood et Fréchet, Lalesco, Goursat, Evans, Davis et beaucoup d'autres, que l'on trouvera cités dans la bibliographie du volume. Tout en réservant pour le second volume la théorie complète de la composition, on en a adopté

ici les notations et l'on a fait usage de ses principes fondamentaux.

L'étude du cas singulier de l'équation de Volterra de première espèce (zéro isolé de la diagonale du noyau) a été faite en reprenant la méthode de mon premier mémoire sur le sujet, avec un complément de M. Holmgren. M. Pérès y a ajouté une autre méthode qui lui est propre et dont le développement est fort simple. Relativement aux équations dites intégro-fonctionnelles, M. Pérès a ajouté l'exposé de divers résultats obtenus par M. Popovici. La partie concernant les équations de Fredholm a été complétée tant en ce qui concerne la structure du noyau que pour l'étude des développements en séries de fonctions fondamentales et M. Pérès a donné une nouvelle façon d'introduire les fonctions fondamentales de Schmidt. Quelques pages ont été consacrées aux équations intégrales à valeurs principales, avec les recherches si importantes de M. G. Giraud. Enfin, en ce qui concerne les équations non linéaires, on a exposé les résultats de M. E. Schmidt et ceux, tout récents, de M. Leray.

La théorie des équations intégrales se prolonge, dans l'Analyse générale de Fréchet et Moore, par l'étude des transformations générales dans les espaces abstraits et de leur inversion. Nous avons volontairement laissé de côté cette extension, qui sera plus à sa place dans le troisième volume de notre ouvrage.

J'espère que les efforts accomplis par M. Pérès et par moi-même pour la préparation de ce volume, serviront à donner un cadre, le plus possible complet, des théories rattachées aux équations intégrales et fourniront une préparation suffisante pour les théories qui seront développées dans les volumes suivants.

Les Auteurs tiennent à exprimer ici leur gratitude aux excellents éditeurs Gauthier-Villars. Ils sont heureux d'adresser

leurs remerciements à Mlle Freda, qui, avec sa profonde connaissance du sujet, a bien voulu les aider dans la révision des épreuves. Ils présentent enfin à M. Borel, qui a accueilli l'ouvrage dans son importante *Collection de monographies sur la Théorie des fonctions*, leurs sentiments de profonde reconnaissance.

VITO VOLTERRA.

THÉORIE GÉNÉRALE
DES
FONCTIONNELLES

LIVRE I.

GÉNÉRALITÉS
SUR
LES FONCTIONNELLES

CHAPITRE I.

LA NOTION DE FONCTIONNELLE.

I. — EXEMPLE PRÉLIMINAIRE.

1. Avant de définir les concepts dont nous nous proposons l'étude, nous examinerons un problème très simple de maxima et minima pour montrer comment on passe naturellement de la considération des *fonctions d'un nombre fini de variables* à celle de quantités qui dépendent d'*une infinité de variables*, à savoir les valeurs, en nombre infini, assumées par une fonction arbitraire $x(t)$ dans un intervalle (a, b) de valeurs de t.

2. Soit le produit de deux nombres x, y dont la somme est constante. Il est connu que ce produit est maximum quand les deux nombres sont égaux. Interprétant géométriquement ce résultat, nous obtenons l'énoncé suivant : de tous les rectangles qui ont un même périmètre, c'est le carré qui donne l'aire maximum.

Passons au problème plus général de déterminer le polygone plan de n côtés qui, pour un périmètre donné, renferme l'aire maximum. Il est facile de voir que la solution est donnée par le polygone *régulier*. Si nous notons les $2n$ coordonnées des sommets du polygone par

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad \ldots, \quad (x_n, y_n),$$

la quantité qui doit être rendue maximum est l'aire

$$\text{(1)} \qquad A = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i \begin{vmatrix} x_i & x_{i+1} \\ y_i & y_{i+1} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i (x_i \Delta y_i - y_i \Delta x_i),$$

fonction des $2n$ variables x_i, y_i soumises à la condition

$$\text{(1')} \qquad \sum_{1}^{n}{}_i \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_i^2} = \text{const.},$$

en posant

$$x_{n+1} = x_1, \qquad y_{n+1} = y_1,$$
$$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i, \qquad \Delta y_i = y_{i+1} - y_i.$$

3. Si nous considérons enfin le problème de déterminer, parmi toutes les courbes fermées C de longueur donnée, celle qui limite l'aire A maximum (cercle), la quantité A est donnée par

$$\text{(2)} \qquad A = \frac{1}{2}\int_C (x\,dy - y\,dx)$$

et il y a la condition

$$\text{(2')} \qquad \int_C \sqrt{dx^2 + dy^2} = l = \text{const.}$$

Les expressions précédentes dépendent, *non plus d'un nombre fini de variables, mais des valeurs des coordonnées de tous les points, en nombre infini, de la courbe* C. Au lieu d'un problème de calcul différentiel ordinaire, portant sur la détermination d'un nombre fini de quantités inconnues, nous avons affaire à un problème de calcul des variations, dans lequel l'inconnue est une fonction (par ses valeurs en tous les points d'un certain intervalle) ou une courbe (par les coordonnées de tous ses points).

4. Dans le cas du polygone à n sommets, nous avions à trouver

$2n$ quantités (x_1, y_1), (x_2, y_2), ..., (x_n, y_n) où figure un indice i, indice *discontinu* et variable par valeurs entières de 1 à n.

Dans le cas d'une courbe fermée, par contre, il est nécessaire, pour la déterminer, de connaître les coordonnées x et y de tous ses points

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (a \leqq t \leqq b)$$

avec

$$x(a) = x(b), \qquad y(a) = y(b).$$

Ces coordonnées dépendent d'un paramètre t qui varie de façon continue dans un intervalle (a, b). Ce paramètre continu t prend la place de l'indice discontinu i et les sommes qui figurent dans les formules (1) et (1') sont remplacées, dans (2) et (2'), par des intégrales dans lesquelles le paramètre t est variable d'intégration.

5. La marche suivie dans cet exemple particulier pour passer d'un problème comportant un nombre fini d'inconnues à un problème dans lequel l'inconnue est une fonction (problème à une infinité d'inconnues) a le caractère d'un principe général, et dont la portée se précisera par la suite. Dans beaucoup de cas analogues, et pour passer de même d'un problème de l'*analyse ordinaire* à un problème du *calcul fonctionnel*, il sera en fait suffisant de remplacer un indice discontinu i par un indice continu (ou paramètre) t et de remplacer les sommes par rapport à i par des intégrales relatives à la variable d'intégration t.

Ce principe, que nous appellerons *principe de passage du discontinu au continu*, a été donné par M. Volterra dès ses premiers travaux sur les questions qui font l'objet du présent Ouvrage. Il constitue une méthode de découverte qui s'est révélée extrêmement féconde. *Son rôle a été et reste fondamental dans les progrès du Calcul fonctionnel.*

II. — LA NOTION DE FONCTIONNELLE.

6. Cette notion fondamentale apparaît comme généralisant celle de fonction de plusieurs variables.

Une fonction de n variables

$$z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{3}$$

est une quantité dont la valeur est bien déterminée par celle des para-

mètres $x_1, x_2, \ldots, x_n$, variables dans un certain champ qui constitue le domaine d'existence ou de définition de la fonction considérée. Du point de vue géométrique on peut faire correspondre à chaque système de valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ un point de l'espace à n dimensions; le champ ou domaine d'existence de f aura une image géométrique dans cet espace et à tout point du domaine ainsi représenté correspondra une valeur de la fonction.

Une autre représentation géométrique est la suivante : soit dans le

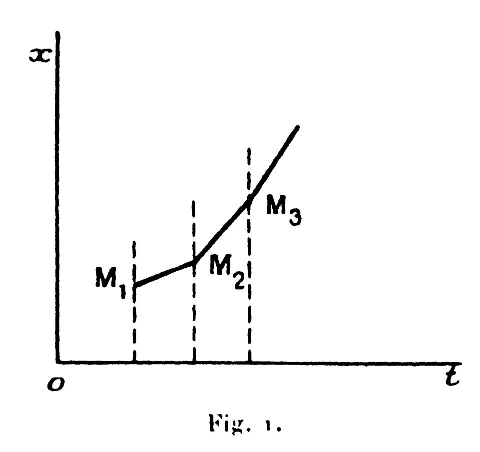


Fig. 1.

plan (t, x) (*fig.* 1) des droites d'abscisses fixes

$$t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_n \qquad (t_1 < t_2 < \ldots < t_n).$$

Faisons correspondre à l'ensemble des valeurs $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les points

$$M_1(t_1, x_1), \quad M_2(t_2, x_2), \quad M_3(t_3, x_3), \quad \ldots$$

ou encore la ligne polygonale $M_1, M_2, M_3, \ldots$; la fonction (3) des n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pourra être considérée comme fonction de cette ligne polygonale et sera définie pour un certain ensemble de telles lignes.

7. Pour passer enfin à la notion de fonctionnelle, il suffit de remplacer l'ensemble des variables $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ par une fonction $x(t)$ définie dans un intervalle (a, b), ce qui géométriquement revient à remplacer la ligne polygonale précédente par la courbe représentative de la fonction

$$x(t) \qquad (a \leqq t \leqq b);$$

on peut dire si l'on veut que l'on est dans un espace dont le nombre

de dimensions est infini, avec la puissance du continu (cf. *infra*, § III).

Une fonctionnelle de $x(t)$ dans l'intervalle (a, b) sera une quantité z, que nous noterons

$$z = F\left[x\begin{pmatrix}b\\t\\a\end{pmatrix}\right] \quad (4)$$ [1],

dont la valeur est déterminée par celles de la fonction $x(t)$ supposée connue lorsque t varie entre a et b, cette fonction $x(t)$ pouvant être prise arbitrairement, sous des restrictions qui limitent le champ fonctionnel de définition ou d'existence de z.

8. Le concept ainsi introduit contient naturellement. comme cas particulier, celui de fonction de plusieurs variables. C'est ainsi, par exemple, que si z dépend seulement des valeurs x_1, x_2 prises par $x(t)$ en deux points fixes t_1 et t_2 de l'intervalle, ce sera une fonction ordinaire

$$z = f(x_1, x_2) \quad (5)$$

et il est inutile de recourir pour la représenter à une autre notation.

Considérons maintenant, par exemple.

$$z = \left(a\frac{dx}{dt} - x\right)_{t=t_1}. \quad (6)$$

C'est, si l'on veut, une fonctionnelle de $x(t)$, mais dont on peut dire qu'elle dépend seulement de la valeur de $x(t)$ au point t_1 et au point infiniment voisin.

L'étude de fonctionnelles telles que les précédentes (5) ou (6) ne fait pas sortir du domaine de l'analyse ordinaire.

Le cas véritablement nouveau, et auquel nous nous attachons par la suite, est celui où z dépend effectivement de toutes les valeurs prises

---

[1] Dans ses travaux de 1887 (Bibliographie I, [108]) où fut introduite la notion de fonctionnelle, M. Volterra employait la notation $F\left|\left[x\begin{pmatrix}b\\t\\a\end{pmatrix}\right]\right|$. Il a utilisé ultérieurement la notation du texte.

Quand il n'y a pas ambiguïté, on peut se dispenser d'indiquer les limites de variations de t et écrire $F[x(t)]$ au lieu de $F\left[x\begin{pmatrix}b\\t\\a\end{pmatrix}\right]$.

par $x(t)$ dans l'intervalle (a, b); z est alors une fonction d'une infinité continue de variables.

9. Précisons, avant d'aller plus loin, d'autres aspects du concept de fonctionnelle et fixons des notations.

La fonction $x(t)$ peut être dite *fonction-argument* ou simplement *argument* de la fonctionnelle $F[x(t)]$.

Il peut arriver que l'intervalle (a, b), dans lequel on prend la *fonction-argument* pour en déduire la fonctionnelle, soit lui-même variable. Pour un argument $x(t)$ assigné dans un intervalle (a_0, b_0) (auquel a et b restent intérieurs), la fonctionnelle sera alors fonction ordinaire de a ou b.

Notons également le cas où $x(t)$ contient aussi d'autres variables α, β, ...; nous écrirons alors

$$z = F\left[x(\overset{b}{\underset{a}{t}}, \alpha, \beta, \ldots)\right] = z(\alpha, \beta, \ldots)$$

pour indiquer que l'opérateur fonctionnel F qui, appliqué à l'argument variable x, donne le résultat z doit être appliqué en supposant que les variables α, β, ... ont des valeurs assignées; z est alors une fonction ordinaire de α, β, ... mais ne dépend pas de t.

La fonctionnelle peut enfin contenir des paramètres λ, μ, ... en dehors de l'argument $x(t)$

$$z = F\left[x(\overset{b}{\underset{a}{t}}); \lambda, \mu, \ldots\right].$$

Dans ce cas, pour chaque système de valeurs de ces paramètres, z est une fonctionnelle de $x(t)$, au sens précédent; elle est par contre une fonction ordinaire de λ, μ, ... quand $x(t)$ est fixe. Nous voyons donc que dans ce cas l'*opérateur fonctionnel* F fait correspondre à chaque fonction $x(t)$, donnée dans un certain champ, une autre fonction

$$z(\lambda, \mu, \ldots) = F\left[x(\overset{b}{\underset{a}{t}}); \lambda, \mu, \ldots\right].$$

Nous obtenons ainsi la notion de *transformation fonctionnelle*.

Lorsqu'il n'y aura pas d'ambiguïté sur le rôle des variables t et α, β, ... ou λ, μ, ..., nous pourrons omettre a et b et écrire simplement

$$F[x(t, \alpha, \beta, \ldots)] \quad \text{ou} \quad F[x(t); \lambda, \mu, \ldots].$$

10. La notion de fonctionnelle peut être immédiatement étendue aux quantités z qui dépendent de toutes les valeurs de plusieurs fonctions, par exemple de

$$x = x(t), \qquad y = y(u),$$

dans les intervalles

$$a \leqq t \leqq b, \qquad c \leqq u \leqq d.$$

La considération de telles fonctionnelles peut avoir son intérêt, mais il convient de noter qu'elles se réduisent immédiatement aux précédentes où apparaissait seulement une *fonction-argument*. La donnée du couple $x(t)$, $y(u)$ revient en effet à la donnée d'une seule fonction définie par les valeurs de x et y dans un intervalle dont la longueur est la somme des longueurs de (a, b) et de (c, d).

11. On obtient par contre une véritable généralisation en considérant une quantité z qui dépend de toutes les valeurs prises par une ou plusieurs fonctions de plusieurs variables dans les champs respectifs C_1, C_2, ... (1) :

$$z = F[\underset{C_1}{\varphi_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \underset{C_1}{\varphi_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)}, \ldots].$$

12. Le concept de fonctionnelle comprend enfin celui de fonction d'*une ligne* et, plus généralement, d'*un hyperespace* (2).

Nous dirons, en effet, qu'une grandeur z est *fonction d'un hyperespace variable* S_r contenu dans un espace $S_n (n > r)$ et *défini paramétriquement par des équations*

$$x_i = \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_r) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

lorsqu'à tout S_r *correspond une valeur de* z

$$z = F[S_r].$$

z est donc une fonctionnelle des n fonctions φ_i, dépendant de toutes leurs valeurs dans le champ C, à r dimensions, pour lequel elles sont définies. Mais il faut remarquer que z n'est *pas la fonctionnelle générale des n fonctions* φ_i. Si les paramètres t_k sont remplacés par d'autres u_k au moyen de la transformation

$$t_k = t_k(u_1, u_2, \ldots, u_r) \qquad (k = 1, 2, \ldots, r)$$

---

(1) *Cf.* C. Fabry, [23] et [24]. Les nombres entre crochets se rapportent à la bibliographie donnée à la fin du Volume.

(2) *Cf.* V. Volterra, [108] et [109].

avec le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(t_1, t_2, \ldots, t_r)}{D(u_1, u_2, \ldots, u_r)} \neq 0,$$

les coordonnées x_i seront d'autres fonctions ψ_i des nouvelles variables u

$$x_i = \psi_i(u_1, u_2, \ldots, u_r) \equiv \varphi_i(t_1, t_2, \ldots, t_r),$$

mais la quantité z, qui dépend uniquement de la forme de l'hyperespace S_r et non de son mode de représentation paramétrique, reste inchangée.

z est donc une fonctionnelle des φ_i jouissant de la propriété particulière suivante : elle est *invariante* lorsque les φ_i sont remplacés par d'autres fonctions ψ_i *déduites des premières par un changement des paramètres.*

III. — CHAMPS FONCTIONNELS.

13. Une fonctionnelle $F\left[x\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right)\right]$ de la fonction $x(t)$ ne sera définie en général que lorsque $x(t)$ varie dans un certain champ fonctionnel. C'est ainsi, par exemple, que la fonctionnelle

$$F\left[x\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right)\right] = \int_a^b x(t)\,dt$$

est définie seulement dans le champ des fonctions x qui sont intégrables dans l'intervalle (a, b) (champ dépendant d'ailleurs de la définition adoptée pour l'intégrale). La fonctionnelle

$$F[x(t)] = \int_a^b f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}\right) dt$$

est définie seulement pour les fonctions $x(t)$ qui ont des dérivées jusqu'à l'ordre n et pour lesquelles

$$\varphi(t) = f\left(t, x, \frac{dx}{dt}, \ldots, \frac{d^n x}{dt^n}\right)$$

est intégrable dans l'intervalle (a, b).

14. L'étude des champs fonctionnels, c'est-à-dire des ensembles dont les éléments sont des fonctions, est évidemment d'un intérêt

primordial pour une compréhension exacte du concept de fonctionnelle.

Pour une fonctionnelle $F\left[x\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right)\right]$, le champ fonctionnel le plus vaste est celui de toutes les fonctions possibles $x(t)$ définies dans l'intervalle (a, b) : il constitue en somme un « espace » à une infinité non dénombrable de dimensions (le nombre de ses dimensions a la puissance du continu en ce que chaque élément de cet ensemble est défini par un ensemble de valeurs de x correspondantes à toutes les valeurs de t entre a et b).

Peu de fonctionnelles sont définies dans la totalité de ce champ et les théories que nous développerons par la suite supposeront toujours un domaine de définition plus ou moins restreint.

Il semble d'ailleurs qu'il n'y ait point là une insuffisance de nos moyens d'analyse et que les restrictions dont il vient d'être question soient dans la nature des choses : les difficultés que présente déjà la conception arithmétique du continu se retrouvent, à une puissance supérieure, dans la conception du champ de toutes les fonctions possibles. Il est donc sans inconvénient, dans certains cas même nécessaire, de se limiter à des classes de fonctions telles que chacune soit caractérisée par une infinité dénombrable de conditions ([1]). La classe des fonctions intéressantes et auxquelles on se bornera dépendra du problème envisagé et aussi de nos moyens d'analyse.

15. Sans prétendre en aucune façon à être complet, citons ici les champs fonctionnels les plus couramment utilisés.

Un champ assez restreint, mais d'intérêt notable, est celui des fonctions *analytiques sur le segment* (a, b). Il a une infinité dénombrable de dimensions en ce sens que ses éléments $x(t)$ sont déterminés par les valeurs de x et des dérivées successives en un point fixe (coefficients d'un développement de Taylor).

Un champ plus vaste est celui des fonctions *continues* $x(t)$. Il a aussi une infinité dénombrable de dimensions, puisqu'une fonction continue est déterminée par ses valeurs aux points d'abscisses ration-

---

([1]) Pour toutes ces questions le Lecteur se reportera aux Ouvrages de M. Borel et, en particulier, aux Notes III, IV et VI de ses Leçons sur la théorie des fonctions [9].

nelles ou parce qu'elle peut être considérée comme limite de fonctions analytiques, ou même de polynomes (Weierstrass [119]).

Plus étendu encore est le champ des fonctions limites de *fonctions continues*. En général nous pouvons adopter la classification bien connue de Baire [8] qui s'applique aux fonctions actuellement les plus intéressantes pour l'analyse.

D'autres champs intéressants seront ceux des fonctions dérivables jusqu'à un certain ordre, des fonctions à variation bornée, des fonctions dont le carré est sommable, etc.

16. Par la suite le champ auquel nous nous limiterons dépendra, comme il vient d'être dit, de la nature de la question traitée. Mais il nous arrivera de le restreindre encore pour la simplicité de l'exposition. Il y a ainsi souvent gros avantage à se limiter à la considération des fonctions *généralement continues* (¹) ou bien *généralement continues ainsi que quelques-unes de leurs dérivées* et, les résultats étant acquis, il est aisé de passer, par des procédés de *prolongement* dont le lecteur aura assez d'exemples, aux cas plus généraux.

IV. — FONCTIONNELLES ET FONCTIONS D'UNE INFINITÉ DÉNOMBRABLE DE VARIABLES.

17. Les considérations précédentes appellent quelques remarques sur le rapport entre la théorie des *fonctionnelles* et celles des fonctions d'une infinité *dénombrable* de variables.

Une fonction analytique de t est déterminée par les coefficients $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n, \ldots)$ de son développement en série de Taylor; une fonction sommable et de carré sommable peut être considérée comme définie par les coefficients $(c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots)$ d'un développement en série du type de Fourier

$$c_1\,\varphi_1(t) + c_2\,\varphi_2(t) + \ldots + c_n\,\varphi_n(t) + \ldots,$$

procédant suivant des fonctions $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t), \ldots$ données et formant un système orthogonal complet (*cf.* Chap. X).

Dans l'un et l'autre cas les fonctionnelles correspondantes s'identi-

---

(¹) C'est-à-dire continues sauf en un nombre fini de points de discontinuité.

fieront avec des fonctions d'une infinité dénombrable de variables et, du point de vue géométrique, elles pourront apparaître comme fonctions d'un point variable dans un espace à une infinité dénombrable de dimensions : espace analytique, étudié tout d'abord par Pincherle et Bourlet ([1]) dans le premier cas, espace hilbertien dans le second cas.

18. Si l'on se place au point de vue réaliste qui est celui de M. Borel et de beaucoup de spécialistes de théorie des ensembles, et si l'on admet avec eux que la notion de fonction la plus générale est en quelque sorte au delà des mathématiques, toute portion utilisable de l'espace fonctionnel général n'aura pas une puissance supérieure à celle des ensembles précédents. Le calcul fonctionnel a-t-il donc, autrement qu'en apparence, une généralité supérieure à celle des théories sur les fonctions d'une infinité dénombrable de variables, théorie de l'espace hilbertien par exemple?

19. Pour répondre à cette question nous ferons d'abord remarquer que le calcul fonctionnel est *capable* de toute théorie de ce genre, actuellement établie ou à venir. De plus, et c'est là un point que l'on apercevra clairement par la suite, le point de vue purement fonctionnel, qui est celui de M. Volterra, est nécessaire pour mettre en évidence, de la façon la plus immédiate, des concepts dont l'utilité ne peut être mise en question.

L'un de ces concepts est celui de *dérivée fonctionnelle* (*cf.* Chap. IV) qui ne pourrait en aucune façon être suppléé par celui de dérivée d'une fonction d'une infinité dénombrable de variables : si par exemple, on envisage une fonctionnelle F comme fonction des coefficients de Fourier de son argument $x(t)$, les dérivées partielles $\frac{\partial F}{\partial c_i}$ dépendent essentiellement du choix du système orthogonal

$$\varphi_1(t), \quad \varphi_2(t), \quad \ldots, \quad \varphi_n(t), \quad \ldots,$$

elles n'ont pas le caractère intrinsèque que présente le concept tout différent de dérivée fonctionnelle.

A cet égard on pourrait dire que, dans le calcul fonctionnel général, les théories sur les fonctions d'une infinité dénombrable de variables occupent une position assez analogue à celle de la géomé-

([1]) *Cf.* PINCHERLE, [84]; BOURLET, [11].

trie cartésienne par rapport à l'analyse vectorielle : la représentation d'une fonctionnelle par une infinité dénombrable de variables implique le choix d'un système de référence [qui sera par exemple défini par la suite orthogonale des $\varphi_i(t)$].

20. Historiquement le développement de l'Analyse fonctionnelle a précédé de bien des années celui des théories concernant l'espace hilbertien. Ces dernières théories ont pris récemment un grand développement par suite de leur application à la physique des quanta. Mais divers Mémoires marquent un retour au point de vue initial. Nous citerons en particulier : une intéressante étude de Heisenberg et Pauli sur la dynamique des quanta [63]; les travaux de Conforto [12] qui étend à l'analyse fonctionnelle les théories de Ricci et le parallélisme de Levi-Civita; les résultats obtenus par Fantappié en ce qui concerne le calcul des matrices, résultats qui découlent de sa théorie des fonctionnelles analytiques.

Cette dernière théorie [27], que nous aurons à exposer dans un autre volume du présent Ouvrage, aboutit essentiellement à l'application de la notion de dérivée fonctionnelle dans une question où, *a priori*, il pouvait paraître difficile d'appliquer les méthodes mêmes du calcul fonctionnel et où pourtant elles se sont révélées très fécondes.

21. Les remarques précédentes n'impliquent point, bien entendu, que l'on doive négliger les méthodes basées sur les fonctions à une infinité dénombrable de variables : MM. Hilbert, Schmidt, Vitali et d'autres auteurs en ont tiré une ample moisson de beaux résultats. Nous aurons d'ailleurs à faire place à ces méthodes dans le présent Ouvrage.

V. — ENSEMBLES ABSTRAITS ET ANALYSE GÉNÉRALE.

22. Notons pour terminer qu'une théorie générale qui englobe non seulement les champs fonctionnels, mais les ensembles abstraits dont les éléments peuvent être de nature quelconque et non spécifiée, a été développée indépendamment par M. Fréchet et E. H. Moore (¹),

(¹) E. H. Moore, [78]; Fréchet, [35].

dans une série de mémoires qui donnent les bases d'une nouvelle théorie appelée *Analyse générale*.

Le point de départ de M. Fréchet peut être résumé de la façon suivante : on ne peut limiter à l'avance le champ dans lequel doit être choisie la variable d'une fonctionnelle ; il faut donc développer les démonstrations « sans faire entrer en ligne de compte la nature de la variable envisagée et en retenant les propriétés topologiques de l'espace, du champ de variation ». E. H. Moore propose, de même, d'extraire les notions plus abstraites communes à plusieurs théories et de les généraliser ainsi en abandonnant pour chacune les propriétés particulières qui dépendent des éléments concrets qu'elle concerne. C'est la marche qu'a toujours suivie la pensée mathématique et, pour ne citer qu'un exemple, des principes analogues sont à l'origine du développement de la théorie des vecteurs.

23. Bien que nous ne puissions, dans le présent Ouvrage, rester au point de vue de l'*Analyse générale*, nous pensons qu'il y a gros avantage à s'y placer au début. Aussi envisagerons-nous le cas d'*ensembles abstraits* dans ce paragraphe et au début du prochain Chapitre, en renvoyant le lecteur, pour plus de détails. aux travaux des auteurs déjà cités, ainsi qu'à ceux de Urysohn, Alexandrof, P. Lévy et beaucoup d'autres. Nous signalerons tout particulièrement le récent Traité de M. Fréchet ([1]).

24. Le concept de fonctionnelle, ou d'opérateur fonctionnel, s'étend bien entendu sans difficulté à ces ensembles abstraits. Nous pourrons dire que U[A] est *une fonctionnelle uniforme dans un ensemble abstrait* E *si à tout élément* A *de* E correspond un nombre *bien déterminé* U[A]. M. Fréchet étend même ce concept à des relations entre deux éléments de nature quelconque.

L'étude des propriétés d'un tel concept ne peut-être développée qu'en choisissant quelques propriétés imposées aux éléments de E. C'est ainsi que (*Cf.* le Chapitre suivant) pour étudier la continuité et développer ensuite un calcul infinitésimal des fonctionnelles générales, il faudra transporter le concept de distance au champ abstrait et préciser les propriétés infinitésimales des ensembles d'éléments de ce champ.

([1]) [48], où l'on trouvera une bibliographie très complète.

25. Si, en particulier, étant donné un ensemble E, nous considérons comme éléments d'un nouvel ensemble les ensembles partiels $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ qui peuvent être extraits de E nous pourrons définir une *fonction d'ensemble* $V[E_n]$ et c'est là une généralisation du concept de fonction de ligne, puisqu'une ligne est un ensemble particulier extrait de l'espace dans lequel elle est placée.

D'importance particulière sont les fonctions *additives* d'ensemble qui jouissent de la propriété suivante : E_1 et E_2 étant deux ensembles sans éléments communs et

$$\overline{E} = E_1 + E_2$$

l'ensemble formé par leur réunion, on a

$$V[\overline{E}] = V[E_1] + V[E_2]. \tag{7}$$

26. Un premier exemple très simple de fonction additive d'ensemble est donnée par l'accroissement

$$\Delta f = f(t_2) - f(t_1)$$

d'une fonction dans un intervalle (t_1, t_2), intervalle qui constitue un ensemble particulier des points du segment (a, b). Cette fonction d'ensemble sert à définir l'intégrale de Stieltjes [1]

$$\int_a^b x(t)\, df(t) = \lim_{n=\infty} \sum_{1}^{n}{}_r\, \overline{x_r}.\Delta f_r$$

quand la limite existe; les termes de la somme au second membre sont les produits de valeurs $\overline{x_r}$ comprises entre le maximum et le minimum de $x(t)$ dans l'intervalle (t_{r-1}, t_r) par l'accroissement correspondant

$$\Delta f_r = f(t_r) - f(t_{r-1})$$

et la limite concerne le cas où l'amplitude maxima μ des n intervalles en lesquels est divisé le segment (a, b) tend vers zéro.

27. Un autre exemple est donné par la mesure $M(E)$ d'un ensemble de points d'un espace ordinaire, la propriété d'additivité exprimée

(1) *Cf.* par exemple P. LÉVY, [75], Chap. III. Nous revenons sur cette notion page 56.

par (7) devant être remplie pour toute définition acceptable de la mesure. La mesure étant d'ailleurs définie élémentairement pour les figures simples (intervalle, rectangle, etc.), le problème général de la mesure est un cas particulier du suivant : prolonger, pour d'autres ensembles, une fonction additive connue pour des domaines élémentaires ([1]).

([1]) Le développement de telles questions nous entraînerait en dehors de notre sujet; le lecteur pourra se reporter au livre de M. de La Vallée Poussin [105].

CHAPITRE II.

CONTINUITÉ DES FONCTIONNELLES ET QUESTIONS CONNEXES.

I. — LIMITE ET DISTANCE DANS UN ESPACE ABSTRAIT. LA NOTION D'ENSEMBLE COMPACT.

1. Espaces ($\mathcal{L}$) de Fréchet. — Pour poursuivre l'étude des espaces abstraits il faut introduire quelques propriétés de leurs éléments. Dans la plupart des questions il est nécessaire, comme l'indique E. H. Moore, de postuler au moins l'opération qui fait passer d'un ensemble des éléments considérés à l'ensemble dérivé.

Suivant, dans ces questions, les idées de M. Fréchet [1], nous admettrons d'abord que l'on ait choisi, dans l'ensemble (ou espace) abstrait considéré, qui sera désigné par ($\mathcal{E}$), une définition de la convergence d'une suite jouissant des propriétés suivantes :

a. Si une suite $A_1, A_2, \ldots$ formée d'éléments de ($\mathcal{E}$) converge vers B, toute suite qui en est extraite converge aussi vers B;

b. Une suite dont tous les termes sont identiques, A, A, ..., converge vers A.

Un espace abstrait pour lequel on peut définir la convergence d'une suite d'éléments en respectant ces deux propriétés est dit, suivant M. Fréchet, espace ($\mathcal{L}$). Il convient de remarquer que, bien souvent, une définition de la convergence respectant les conditions (a) et (b) est imposée par la nature des questions étudiées.

2. Espace distanciable. — Un cas plus particulier, mais fort important, est celui d'un espace ($\mathcal{L}$) pour lequel la notion de convergence

(1) Pour tout ce paragraphe, *cf.* Fréchet, [35].

d'une suite peut être reliée à une définition de la *distance* de deux éléments de l'ensemble.

Il est naturel d'imposer à une telle *distance* les conditions suivantes :

1° La distance de deux éléments quelconques A et B est un nombre

$$(A, B) = (B, A) \geqq 0.$$

2° La distance (A, B) n'est nulle que si les éléments A et B coïncident.

3° Quels que soient les éléments A, B, C, on a

$$(A, B) \leqq (A, C) + (C, B).$$

Dans tout ensemble abstrait ($\mathcal{E}$) on peut définir une *distance* vérifiant les conditions (1), (2), (3) [1], mais, s'il s'agit d'un espace ($\mathcal{L}$), on possède déjà une définition de la convergence d'une suite et, pour présenter quelque utilité, la *distance* doit vérifier la quatrième condition suivante :

4° Pour que A soit la limite d'une suite $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, il est nécessaire et suffisant que la distance (A, A_n) tende vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

Lorsqu'un espace ($\mathcal{L}$) est capable d'une définition de la distance satisfaisant aux conditions 1 à 4 nous dirons que c'est un espace ($\mathcal{D}$) ou un *espace distanciable*. Il faut envisager un espace distanciable pour généraliser, le plus complètement, les propriétés des ensembles de points et des fonctions de point.

3. Exemple d'espace ($\mathcal{L}$) qui n'est pas distanciable. — Un espace ($\mathcal{L}$) quelconque sera-t-il nécessairement distanciable ? La réponse à cette question est négative et il est facile de le voir par des exemples.

Soit l'ensemble de toutes les fonctions $x(t)$ ($a \leqq t \leqq b$) et adoptons pour la convergence d'une suite de telles fonctions vers la fonction limite $x(t)$ la définition usuelle (convergence en chaque point t considéré individuellement). On vérifie qu'il est impossible de relier cette notion de convergence à une *distance* possédant les propriétés pré-

---

[1] En prenant, par exemple (A, B) = 1, sauf si A et B sont identiques, et (A, A) = 0.

cisées. M. Fréchet, à qui est dû ce résultat [1], indique aussi que c'est pour cela que, dans la théorie des fonctions, la convergence ordinaire est souvent peu maniable et que l'on se trouve amené, dans bien des cas, à renforcer la convergence en introduisant par exemple une condition de convergence uniforme.

4. **Espace complet.** — Soit $(\mathcal{E})$ un espace abstrait distanciable. On pourrait être tenté d'énoncer un critère de convergence analogue au critère classique de Cauchy : pour la convergence d'une suite d'éléments de $(\mathcal{E})$ $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, il est nécessaire et suffisant que la distance de deux éléments quelconques de la suite soit arbitrairement petite quand leurs rangs sont assez élevés.

Ce n'est pas toujours vrai : la condition posée est bien *nécessaire*, mais elle n'est pas toujours *suffisante*, comme on le voit immédiatement en envisageant l'ensemble des nombres rationnels, avec la définition habituelle de la distance.

Lorsque le critère de Cauchy est applicable, l'espace $(\mathcal{E})$ sera dit *complet*. Dans le cas contraire il peut arriver que $(\mathcal{E})$ puisse être rendu complet par un changement de la définition de la distance, ou encore par l'adjonction d'éléments nouveaux (éléments impropres) : le lecteur le concevra sans peine d'après l'exemple des nombres rationnels.

5. Les notions précédentes étant acquises, les principales propriétés des ensembles de points se généralisent sans peine.

Voici un exemple : les éléments limites d'un ensemble E extrait de l'ensemble distanciable $(\mathcal{E})$ sont ceux qui peuvent être obtenus comme limite de suites infinies d'éléments distincts appartenant à E. Il forment un nouvel ensemble E′ (*premier dérivé* de E). Un ensemble qui contient son premier dérivé est dit *fermé*. On reconnaît immédiatement que *l'ensemble* E′, *dérivé de* E, *est fermé*.

---

[1] FRÉCHET, [35]. La démonstration est assez simple pour pouvoir être reproduite ici. Si l'espace considéré était distanciable, tout ensemble dérivé d'un ensemble de ses éléments serait fermé (*cf.*, infra, n° 5). Or il est facile de voir qu'il n'en est pas toujours ainsi. Prenons pour ensemble celui des fonctions continues; l'ensemble dérivé E′ est formé par les fonctions de classes zéro et 1 de Baire [8] et il y a des fonctions de classe 2, c'est-à-dire qui appartiennent à l'ensemble dérivé de E′ sans faire partie de E′.

6. **Ensemble compact.** — Les ensembles bornés de points de l'espace ordinaire jouent un rôle important dans la théorie des fonctions et ils interviennent par la propriété suivante : *n'importe quel sous ensemble infini d'un ensemble borné admet au moins un élément limite.*

M. Fréchet a justement souligné l'intérêt de cette propriété dans le cas des ensembles abstraits. Il nomme *ensemble compact* tout ensemble d'éléments d'un espace ($\mathcal{L}$) qui : ou bien ne contient qu'un nombre fini d'éléments, ou bien, s'il en contient une infinité, est tel que tout sous-ensemble infini que l'on en extrait admette au moins un élément limite.

7. Nous verrons le concept d'*ensemble compact* intervenir, au paragraphe suivant, dans l'étude de la continuité des fonctionnelles et de leurs maximum et minimum. Le même concept joue aussi un rôle essentiel dans d'autres questions : il faut rappeler au moins que l'on peut y relier la notion de *famille normale de fonctions* (une famille de fonctions est dite normale dans un domaine si, de toute suite infinie de fonctions de la famille, on peut extraire une suite partielle convergeant uniformément dans le domaine); on sait que. grâce principalement aux travaux de M. P. Montel, la notion de famille normale a trouvé d'importantes applications à la Théorie des fonctions analytiques.

8. **Exemples d'ensembles compacts.** — Dans le cas d'un ensemble de points de l'espace ordinaire il y a identité entre les notions *d'ensemble compact* et *d'ensemble borné.* Dans le cas d'ensembles de fonctions et en général d'ensembles abstraits, il convient d'avoir des critères permettant d'affirmer que tel ensemble est ou non compact. Nous envisagerons quelques exemples :

a. Espace de fonctions holomorphes de Fréchet. — Il est constitué par toutes les fonctions qui sont holomorphes à l'intérieur d'une même aire fixe A du plan complexe, en convenant de dire qu'une suite de telles fonctions $f_n(z)$ converge vers une limite $f(z)$ quand $f_n(z)$ converge vers $f(z)$ uniformément dans toute aire intérieure à A. M. Fréchet établit [35] que l'espace ($\mathcal{H}$) ainsi défini est distanciable et complet. Il démontre de plus que : pour qu'un ensemble extrait de ($\mathcal{H}$) soit compact, il faut et il suffit que les fonctions de cet

ensemble soient également bornées [1] dans toute aire intérieure à A.

b. fonctions également continues (Ascoli et Arzelà). — Les résultats de Ascoli, puis de Arzelà [2] (lequel avait pour but l'étude des maxima et des minima d'une fonctionnelle) ont été obtenus avant qu'ait été introduite la notion d'ensemble compact. Ils impliquent en particulier l'énoncé suivant :

Plaçons-nous dans l'espace $(\mathcal{C})$ des fonctions continues $x(t)$ $(a \leqq t \leqq b)$ en prenant pour définition de la convergence *la convergence uniforme. Pour qu'un ensemble de fonctions de* $(\mathcal{C})$ *soit compact, il est nécessaire et suffisant que ces fonctions soient également bornées et également continues.*

Vu l'importance de ce résultat nous en esquisserons la démonstration.

Rappelons tout d'abord que des fonctions $x(t)$ formant un ensemble E sont dites *également continues* si à tout nombre positif ε on peut faire correspondre un nombre positif α tel que, t_1 et t_2 étant arbitraires et vérifiant

$$|t_1 - t_2| < \alpha,$$

on ait

$$|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon.$$

quelle que soit la fonction $x(t)$ de l'ensemble E.

Ceci posé vérifions que les conditions posées sont suffisantes. Prenons pour cela une suite dénombrable de valeur de t

$$(1) \qquad t_1, \quad t_2, \quad \ldots, \quad t_n, \quad \ldots$$

denses dans tout intervalle du segment (a, b) [par exemple les valeurs obtenues en divisant (a, b) en $2, 2^2, 2^3, \ldots$ parties égales]. Si l'ensemble E des fonctions considérées n'est pas formé d'un nombre fini d'éléments, on pourra, de tout sous-ensemble infini, extraire une suite

$$x_1^{(1)}(t), \quad x_2^{(1)}(t), \quad \ldots, \quad x_n^{(1)}(t), \quad \ldots$$

convergente pour $t = t_1$ [ceci parce que les valeurs $x(t_1)$ sont

---

[1] C'est-à-dire bornées dans leur ensemble.

[2] Bibliographie [7], [1], [2]. Il convient de noter que Ascoli n'avait pas l'idée de *fonctionnelle* et ne considère que des ensembles de lignes dont il étudie la limite. Arzelà, dont les travaux sont notablement plus récents, applique au contraire le concept de *fonctionnelle*. Le but de ses travaux était la justification du *principe de Dirichlet* et il a précédé Hilbert dans cette voie (*cf.* Chap. V, n° 4).

bornées]. Puis, on tirera de cette suite une autre suite qui converge aussi pour $t = t_2$ et ainsi de suite. On parviendra enfin à une suite

$$x_1^{(n)}(t), \quad x_2^{(n)}(t), \quad \ldots, \quad x_n^{(n)}(t), \quad \ldots$$

convergente pour $t = t_1$, $t = t_2$, ..., $t = t_n$. La succession

$$x_1^{(1)}(t), \quad x_2^{(2)}(t), \quad \ldots, \quad x_n^{(n)}(t), \quad \ldots$$

est évidemment convergente pour l'infinité dénombrable des valeurs (1).

Or, t étant quelconque, on a

$$(2) \quad |x_n^{(n)}(t) - x_m^{(m)}(t)| < |x_n^{(n)}(t_i) - x_m^{(m)}(t_i)| + |x_n^{(n)}(t) - x_n^{(n)}(t_i)| + |x_m^{(m)}(t) - x_m^{(m)}(t_i)|,$$

quantité arbitrairement petite, quel que soit t, si m et n sont choisis assez grands : on prendra en effet t_i tel que

$$|t_i - t| < \alpha,$$

ce qui peut se faire, quel que soit t, en utilisant seulement un nombre fini des t_i; puis on prendra m et n assez grand pour que

$$|x_m^{(m)}(t_i) - x_n^{(n)}(t_i)| < \varepsilon$$

pour chacun des t_i en question; d'après l'égale continuité le second membre de (2) est inférieur à 3ε arbitrairement petit.

La suite $x_n^{(n)}(t)$ converge donc uniformément vers une fonction continue $x(t)$ et les conditions précitées sont bien suffisantes. On vérifiera aisément qu'elles sont de même nécessaires.

9. **Extension du théorème de Borel-Lebesgue.** — On sait le rôle essentiel que joue, en Théorie des fonctions, le théorème de Borel-Lebesgue, dont l'énoncé est le suivant :

Soit, sur un segment fini, une infinité d'intervalles tels que tout point du segment soit intérieur à l'un au moins d'entre eux. On peut remplacer ces intervalles par quelques-uns d'entre eux, *en nombre limité*, jouissant de la même propriété.

M. Fréchet a montré [44] qu'on peut généraliser ce théorème en se plaçant dans un espace abstrait *distanciable* et en remplaçant le segment par un ensemble E *compact et fermé*. L'énoncé devient :

S'il existe une famille $\mathfrak{F}$ d'ensembles I, *formés d'éléments de*

l'espace considéré, telle que tout élément de E *soit intérieur à l'un au moins des* I, *on peut extraire de* $\mathcal{F}$ *une famille* $\mathcal{F}_1$ *jouissant de la même propriété et formée par des ensembles* I *en nombre fini.*

Justifions ce résultat, que nous aurons l'occasion d'utiliser. Il faut d'abord préciser le sens du mot *intérieur :* suivant M. Fréchet, un élément de E sera dit intérieur à I s'il appartient à I et ne peut pas être obtenu comme limite d'éléments n'appartenant pas à I.

La démonstration repose alors sur les deux lemmes suivants :

α. *Si un élément* A *intérieur à* I *est limite d'une suite* A_1, A_2, ..., A_n, ..., *les* A_n *sont intérieurs à* I *à partir d'un certain rang.*

Sinon en effet il y aurait une infinité de valeurs de n tel que A_n soit limite d'une suite $A_n^{(1)}$, $A_n^{(2)}$, ... d'éléments qui n'appartiennent pas à I. Mais l'ensemble dérivé de l'ensemble des $A_n^{(p)}$ est fermé (n° 5), A appartient donc à cet ensemble, ce qui contredit l'hypothèse : A intérieur à I.

β. *L'ensemble* E *étant compact, on peut, pour toute valeur du nombre positif* ε, *former des ensembles* K_1, K_2, ..., K_q, *en nombre fini, tels que la distance entre deux éléments quelconques de* K_i *soit inférieure à* ε *et tels que tout élément de* E *soit intérieur à l'un au moins des* K_i.

Prenons pour cela η tel que les conditions $(A, C) < \eta$ et $(C, B) < \eta$ entraînent $(A, B) < \varepsilon$, puis prenons un nombre $\omega < \eta$. A_1 étant un élément de E choisissons, s'il en existe, un autre élément A_2 de E tel que (A_1, A_2) dépasse ω, puis un élément A_3 tel que les distances (A_1, A_3) et (A_2, A_3) dépassent ω et ainsi de suite. Nous formons ainsi une suite A_1, A_2, ... d'éléments dont les distances mutuelles dépassent ω. Or cette suite est forcément limitée car, dans le cas contraire, on pourrait, l'ensemble E étant compact, en extraire une suite A'_i convergente et l'on aurait alors (A'_i, A'_j) inférieur à ω pour i et j assez grands [1].

Au moyen des A_i on formera les ensembles K_i en prenant, pour K_i,

[1] Notons en passant le résultat suivant (Fréchet) : dans un espace distanciable complet il est nécessaire et suffisant, pour qu'un ensemble E soit compact, que, quel que soit ω, tout ensemble E_ω formé de points de E dont les distances mutuelles sont supérieures à ω ne puisse contenir qu'un nombre fini de points.

tous les éléments C de l'espace pour lesquels $(A_i, C) < \eta$. Tout élément B de E sera intérieur à l'un des K_i, si ω a été choisi assez petit pour que des conditions $(A_i, B) < \omega$ et $(BB') < \omega$ entraînent $(A_i, B') < \eta$.

Pour établir enfin le théorème, prenons $\varepsilon = \frac{1}{p}$ et formons pour cette valeur de ε les ensembles $K_1, K_2, \ldots, K_q$. Si le théorème est en défaut, il sera également en défaut pour la partie de E qui appartient à l'un des ensembles K, lequel sera désigné par T_p. Désignons par A_p l'un des éléments de E qui appartiennent à T_p. p prenant toutes les valeurs entières nous aurons une suite d'éléments A_p dont nous pourrons extraire une suite partielle A'_i convergente vers un élément A de E (ensemble compact et fermé). A est intérieur à l'un des I, soit I_0. Désignons d'ailleurs par T'_i l'ensemble T_p qui correspond à A'_i. Si l'on constate que, pour i assez grand, T'_i a tous ses éléments intérieurs à I_0 il y aura contradiction avec le fait que le théorème doit être en défaut pour la partie de E appartenant à T'_i et la démonstration sera achevée. Mais, dans le cas contraire, on pourrait trouver une infinité de valeurs de i telles que, dans chaque T'_i, il y ait un élément C_i non intérieur à I_0. Or (A'_i, A) et (A'_i, C_i) tendent vers zéro; la suite des C_i tendrait donc vers A ce qui contredit l'hypothèse : A intérieur à I_0 (*lemme* α).

II. — CONTINUITÉ ET SEMI-CONTINUITÉ D'UNE FONCTIONNELLE.

10. Soit une fonctionnelle $U[A]$ définie dans un espace abstrait $\mathcal{E}$ qui soit un espace $(\mathcal{L})$. Elle sera dite continue pour l'élément A si l'on a

$$\lim_{n=\infty} U[A_n] = U[A]$$

toutes les fois que la suite des éléments A_n de $\mathcal{E}$ donne

$$\lim_{n=\infty} A_n = A.$$

Si l'espace abstrait est distanciable la continuité en A s'exprimera par les inégalités habituelles : à tout nombre ε arbitrairement petit on pourra associer un nombre η tel que

$$(3) \qquad |U[A'] - U[A]| < \varepsilon$$

soit entraînée par

$$(A, A') < \eta. \tag{4}$$

11. La notion de continuité uniforme s'étend de même. Si la précédente (4) entraîne (3) quels que soient A et A′ dans un certain champ, il y aura continuité uniforme dans ce champ.

Seulement une fonctionnelle *continue* pour tout élément d'un champ n'est pas forcément *uniformément continue dans ce champ* et c'est là une différence importante avec le cas des fonctions d'un nombre fini de variables. Mais M. Fréchet a montré qu'il y a bien continuité uniforme si le champ de définition de U[A] est un ensemble E compact et fermé : dans ce cas la continuité pour tout élément de E entraîne la continuité uniforme dans E.

12. Indiquons rapidement la démonstration, tout à fait analogue à celle que l'on donne pour les fonctions ordinaires. Si la fonctionnelle U[A], continue en chaque élément de son champ de définition E (qui est supposé compact et fermé) n'était pas uniformément continue, il existerait un nombre positif α tel que, η étant arbitrairement petit, on ait dans E des couples A′A″ dont la distance est moindre que η et qui donnent

$$|U[A'] - U[A'']| \geqq \alpha. \tag{5}$$

Prenons une infinité de valeurs de η tendant vers zéro et, pour chacune, un couple d'éléments A′A″. Puisque E est compact et fermé, il existerait un élément A_0 qui soit un élément limite de l'ensemble des A′A″ ainsi choisis ; mais l'inégalité (5) contredirait alors la continuité en A_0, ce qui justifie l'énoncé.

13. Remarquons que la définition de la continuité d'une fonctionnelle dépend de la définition de la limite d'une suite contenue dans l'ensemble E ou encore de la convention adoptée pour mesurer la distance (A, B) de deux éléments. Par un changement de cette convention une fonctionnelle peut donc cesser d'être continue, ou vice-versa. On en verra un exemple plus loin (§ III, n°s 18-20).

14. Extremum d'une fonctionnelle. — Beaucoup de théorèmes qui

valent pour les fonctions de variables réelles peuvent être étendus à des fonctionnelles définies dans un espace abstrait.

Soit, par exemple, le théorème bien connu, dû à Weierstrass, et qui peut s'énoncer ainsi : *une fonction d'une variable, définie pour un ensemble fermé et borné e de valeurs de cette variable et continue sur cette ensemble, jouit des propriétés suivantes :* 1° *elle est bornée sur e;* 2° *elle prend au moins une fois sur e une valeur égale à sa limite supérieure (maximum) et une valeur égale à sa limite inférieure (minimum).* Ce théorème se généralise immédiatement aux fonctions de plusieurs variables.

Pour avoir le résultat analogue du calcul fonctionnel, il faut bien entendu utiliser encore la notion d'ensemble compact. M. Fréchet a établi le théorème suivant

Toute fonctionnelle U[A] *uniforme et continue dans un ensemble fermé et compact* E : 1° *est limitée sur* E; 2° *prend les valeurs de ses limites supérieure et inférieure au moins une fois dans* E (¹).

La démonstration calque exactement celle de Weierstrass. Si la fonctionnelle n'était pas limitée il y aurait une suite d'éléments de E pour lesquels U prendrait des valeurs croissantes à l'infini. Cette suite aurait au moins un élément limite A_0 appartenant à E et pour lequel U ne saurait être continue. Soit d'autre part M la limite supérieure (ou inférieure) de la fonctionnelle. Si cette limite n'était pas effectivement atteinte en un élément de E, on pourrait trouver une suite d'éléments pour lesquels les valeurs de U tendent vers M : mais alors, d'après la continuité, la valeur de U en un point limite de cette suite serait effectivement M.

15. Nous avons déjà fait allusion (page 2) au *Calcul des variations* et nous y reviendrons ultérieurement. Le *Calcul des variations* concerne l'extrémum de fonctionnelles particulières de sorte qu'il peut apparaître comme un Chapitre particulier du Calcul fonctionnel ayant peut être ses méthodes propres, mais où il y a aussi grand intérêt à utiliser les théories générales sur les fonctionnelles : dans

---

(¹) On trouvera aussi un réciproque de ce théorème dans le Mémoire de M. Fréchet, [35].

son beau Traité de Calcul des variations, M. Hadamard a justement insisté sur ce dernier point ([1]) qui a été développé par M. Tonelli.

On pourrait donc croire à première vue qu'un théorème tel que celui que nous avons établi au n° 14 doit dominer le calcul des variations. Il n'en est pas tout à fait ainsi parce que la condition de continuité imposée à la fonctionnelle $U[A]$ est trop restrictive : les fonctionnelles les plus importantes au point de vue du Calcul des variations ne sont pas *continues*, mais présentent seulement la *semi-continuité* supérieure ou inférieure.

Cette notion de semi-continuité, introduite par Baire pour les fonctions ordinaires a été étendue par M. Tonelli aux fonctionnelles ([2]). Elle joue un rôle primordial.

16. **Semi-continuité.** — Reprenons la fonctionnelle $U[A]$; elle sera dite *semi-continue inférieurement* (*supérieurement*) *pour l'élément* A *si, étant donnée une quantité arbitraire positive* ε, *on peut lui associer* α *telle que l'inégalité*

$$(A, A') < \alpha$$

entraîne

$$U[A'] > U[A] - \varepsilon, \qquad (U[A'] < U[A] + \varepsilon).$$

Il est clair qu'une fonctionnelle qui est semi-continue à la fois supérieurement et inférieurement est continue au sens ordinaire [avec une définition donnée de la distance (A, A')]. Ceci posé le théorème du n° 14 s'étend aux fonctionnelles semi-continues et l'on a les résultats suivants, dont la démonstration est d'ailleurs très simple :

a. Si la fonctionnelle $U[A]$, définie dans un ensemble E de valeurs de A, y prend une valeur maximum (absolu) ou minimum (absolu), il y a semi-continuité supérieure ou inférieure pour la valeur correspondante de A.

b. Si la fonctionnelle $U[A]$ est semi-continue supérieurement dans l'ensemble E compact et fermé : 1° elle est bornée supérieurement dans E; 2° elle atteint son maximum en au moins un élément de E.

c. Énoncé analogue à *b* pour la semi-continuité inférieure et le minimum de $U[A]$.

([1]) *Cf.* Hadamard, [61].
([2]) Tonelli, [99], [100].

III. — LE CAS DU CALCUL FONCTIONNEL; DISTANCES ET CONTINUITÉS ÉLÉMENTAIRES.

17. Nous supposerons maintenant que l'ensemble E soit celui des fonctions $x(t)$ définies dans l'intervalle (a, b). Étant donné deux telles fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$ nous pourrons définir leur *distance* comme égale au maximum du module de $x_1(t) - x_2(t)$ quand $a \leqq t \leqq b$. Les conditions posées au n° 2 sont évidemment satisfaites, une suite de fonction $x(t)$ ne devant être dite *convergente* que s'il y a *convergence uniforme* pour $a \leqq t \leqq b$.

La définition précédente de la distance est la plus immédiate et la plus commode lorsqu'il s'agit d'étudier des fonctionnelles définies dans un ensemble de fonctions continues, ou même seulement bornées. C'est elle que M. Volterra a utilisée dès le début de ses recherches. Nous dirons qu'elle donne la *distance élémentaire* (*d'ordre zéro*) des deux fonctions considérées. Il est utile d'introduire cette dénomination parce que, comme nous le verrons, d'autres définitions de la distance fonctionnelle sont possibles.

La fonctionnelle

$$F\left[x\binom{b}{t}_{a}\right],$$

définie pour tout ou partie du champ E et continue avec la définition précédente de la distance sera dite posséder *la continuité élémentaire* (*d'ordre zéro*) (¹).

18. Soit, par exemple,

$$F\left[x\binom{b}{t}_{a}\right] = \int_a^b f[t, x(t)]\,dt,$$

(¹) Dans plusieurs traités cette continuité est dite *continuité liée au voisinage uniforme :* le mot uniforme rappelle seulement qu'une suite des fonctions $x_n(t)$ ne doit être considérée comme ayant une limite $x(t)$ que s'il y a convergence uniforme. Mais cette dénomination peut entraîner confusion avec la continuité uniforme de la fonctionnelle. On pourrait employer la désignation de *continuité absolue* qui ne présenterait pas le même défaut. Comme pourtant il y a une notion, toute différente, *d'absolue continuité* (*Cf.* Chap. V, n° 6), nous préférons la dénomination du texte.

Il faut préciser distance ou continuité élémentaire *d'ordre zéro*, parce que, comme on le verra, on doit introduire les notions analogues pour un ordre entier quelconque.

fonctionnelle qui a un sens si les fonctions f et x sont continues par rapport aux variables qui y figurent; elle a alors la continuité élémentaire d'ordre zéro.

Au contraire, soit

$$G\left[x\left(\overset{1}{\underset{0}{t}}\right)\right] = \overline{\lim}\, x'(t) \quad (^1)$$

qui a un sens dans le champ des fonctions dérivables. Elle n'est évidemment pas continue au sens qui vient d'être précisé. Prenons, en effet

$$x_1(t) = k,$$
$$x_2(t) = k + \varepsilon \sin\frac{2\pi t}{\varepsilon},$$

nous aurons

$$|x_1 - x_2| < \varepsilon,$$

d'où, avec la définition précédente de la distance

$$\lim_{\varepsilon = 0} x_2(t) = x_1(t).$$

Or

$$x'_1(t) = 0,$$
$$x'_2(t) = 2\pi \cos\frac{2\pi t}{\varepsilon},$$

d'où

$$G[x_1(t)] = 0,$$
$$G[x_2(t)] = 2\pi,$$

ce qui montre bien qu'il n'y a pas continuité élémentaire d'ordre zéro.

19. Avec la définition précédente de la distance, deux fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$ doivent être considérées comme très voisines si leur différence reste en valeur absolue très petite quel que soit t. On peut définir le *voisinage (élémentaire) d'ordre zéro, correspondant au nombre positif* ε, d'une fonction donnée $x_1(t)$ comme l'ensemble des fonctions $x(t)$ appartenant au champ fonctionnel considéré telles que

$$|x(t) - x_1(t)| < \varepsilon$$

quel que soit t $(a \leqq t \leqq b)$.

Cette notion de voisinage joue un rôle en Calcul des variations ([2]) ainsi que d'autres types de voisinage, faisant intervenir non seulement

---

([1]) $\overline{\lim}$ désignant la plus grande des limites.

([2]) HADAMARD, [61], p. 49.

la différence $x(t) - x_1(t)$, mais aussi les dérivées successives de cette différence.

20. Bornons-nous à des fonctions $x(t)$ définies, *ainsi que leur dérivée première*, dans l'intervalle (a, b). Nous pourrons convenir que deux fonctions de ce genre seront très voisines lorsque seront très voisines, non seulement leurs valeurs pour un même t d'ailleurs quelconque, mais encore les valeurs correspondantes des dérivées.

Nous arrivons ainsi à la notion de *voisinage* (*élémentaire*) *du premier ordre*, défini par les inégalités

$$|x(t) - x_1(t)| < \varepsilon, \qquad |x'(t) - x'_1(t)| < \varepsilon \qquad (a \leqq t \leqq b),$$

auquel correspond une nouvelle définition de la distance fonctionnelle de deux fonctions $x_1(t)$, $x_2(t)$. Ce sera la *distance élémentaire du premier ordre*, égale au maximum de

$$|x_1(t) - x_2(t)| \qquad \text{et} \qquad |x'_1(t) - x'_2(t)| \qquad (a \leqq t \leqq b).$$

La continuité correspondante sera dite *continuité élémentaire du premier ordre*.

La fonctionnelle précédente G qui n'avait pas la continuité élémentaire d'ordre zéro admet la continuité du premier ordre.

21. Plus généralement considérons comme très voisines deux fonctions qui diffèrent très peu en tout point de l'intervalle (a, b) ainsi que leurs dérivées d'ordre 1, 2, ..., p. Nous serons conduits à de nouvelles définitions du voisinage (voisinage élémentaire d'ordre p), de la distance (la distance élémentaire d'ordre p sera égale au maximum, dans (a, b) des expressions

$$|x_1(t) - x_2(t)|, \quad |x'_1(t) - x'_2(t)|, \quad \ldots, \quad |x_1^{(p)}(t) - x_2^{(p)}(t)|\Big).$$

La continuité correspondante sera dite continuité élémentaire d'ordre p.

Les diverses continuités élémentaires, d'ordres 0, 1, 2, ..., p, sont évidemment de plus en plus restrictives.

22. L'introduction de la continuité élémentaire permet de préciser, comme l'a remarqué Gateaux ([1]), le passage signalé au début (Chap. I, § I) des fonctions de n variables aux fonctionnelles.

([1]) Gateaux, [57].

Soit en effet une fonctionnelle

$$F\left[y(\overset{1}{\underset{0}{t}})\right]$$

définie dans le champ des fonctions bornées et continues ($0 \leqq t \leqq 1$, $A \leqq y \leqq B$) et continue élémentaire d'ordre zéro dans ce champ. Remplaçons $y(t)$ par une fonction $\eta(t)$ telle que

$$\eta = y_1 = y\left(\frac{1}{n}\right) \qquad \text{pour } 0 \leqq t \leqq \frac{1}{n},$$

$$\eta = y_h = y\left(\frac{h}{n}\right) \qquad \text{pour } t = \frac{h}{n} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n)$$

et qui varie linéairement pour

$$\frac{h}{n} \leqq t \leqq \frac{h+1}{n} \qquad (h = 1, 2, \ldots, n-1)$$

(n étant un entier positif). $F[\eta(t)]$ sera une fonction ordinaire des n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$

$$F[\eta(t)] = f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

f_n étant évidemment continue par rapport aux variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Puisque $y(t)$ est fonction continue de t on a

$$\lim_{n=\infty} \eta(t) = y(t)$$

et, du moment que la fonctionnelle a la continuité élémentaire d'ordre zéro, il vient

$$F[y(t)] = \lim_{n=\infty} f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

La convergence est uniforme dans tout ensemble compact de fonctions continues.

Donc : *les fonctionnelles ayant la continuité élémentaire d'ordre zéro s'expriment comme limites de fonctions continues de n variables lorsque le nombre de ces variables augmente indéfiniment.*

IV. — L'ESPACE DES FONCTIONS MESURABLES. DIGRESSION SUR L'INTÉGRALE DE LEBESGUE.

23. Nous aurons à étudier dans la suite un autre mode de continuité des fonctionnelles, également très important : *la continuité en*

moyenne. Cette notion repose sur une définition de la distance distincte de celles du paragraphe III et qui ne prend toute sa valeur que par l'emploi de l'intégrale de Lebesgue. L'intégrale en question est d'ailleurs utile dans de nombreuses questions d'Analyse fonctionnelle. Nous en reprendrons donc ici la théorie en nous plaçant à un point de vue qui ne nous écarte pas de l'objet du présent ouvrage : l'étude des diverses définitions de l'intégrale est l'étude des champs fonctionnels dans lesquels on peut définir la fonctionnelle

$$\mathrm{I}\left[x\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right)\right] = \int_a^b x(t)\,dt.$$

En partant d'un champ fonctionnel très simple, quelques propriétés immédiates conduisent à un *prolongement* qui donne, très naturellement, l'intégrale de Lebesgue ([1]).

24. Soit l'intervalle (a, b) divisé en un nombre fini d'intervalles partiels, d'ailleurs quelconques et soit une fonction $x(t)$ *constante* dans chacun de ces intervalles; *nous dirons que c'est une fonction simple*. Il n'y a aucune difficulté à définir, comme somme de rectangles, l'intégrale

$$\mathrm{I} = \int_a^b x(t)\,dt.$$

La fonctionnelle I est donc définie, de façon immédiate, dans le champ des fonctions simples.

Pour étendre sa définition il faut d'abord se rendre compte du mode de continuité de I dans le champ précédent. Or on voit de suite que deux intégrales peuvent être très voisines sans que les fonctions correspondantes soient partout très voisines : $x_1(t)$ et $x_2(t)$ étant deux fonctions simples, on a en effet

$$|\mathrm{I}_1 - \mathrm{I}_2| = \left|\int_a^b x_1(t)\,dt - \int_a^b x_2(t)\,dt\right| \leqq l\varepsilon + \mathrm{LH},$$

en désignant par l l'étendue totale des intervalles dans lesquels $|x_1 - x_2| < \varepsilon$, en prenant $\mathrm{L} = b - a - l$ et nommant H le maximum de $|x_1| + |x_2|$. Le second membre est très petit avec ε et L.

---

(1) La méthode donnée ici par M. Pérès s'inspire très directement de celle de Fr. Riesz [93].

25. *La convergence en mesure.* — Rappelons ici qu'un ensemble E de points du segment (a, b) est dit avoir une mesure inférieure à η si l'on peut enfermer ses points dans des intervalles en nombre fini ou dénombrable et dont la somme des longueurs est inférieure à η. L'ensemble E sera dit de mesure nulle si les intervalles précédents peuvent être choisis de façon que la somme de leurs longueurs soit arbitrairement petite.

Introduisons enfin la notion de convergence en mesure (¹) : une suite de fonctions définies dans l'intervalle (a, b)

$$(6) \qquad x_1(t), \quad x_2(t), \quad \ldots, \quad x_n(t), \quad \ldots$$

est dite *converger en mesure* dans cet intervalle vers la fonction $X(t)$ si, ε et η étant choisis arbitrairement petits, on peut leur associer N tel que, pour $n > N$ on ait

$$|x_n(t) - X(t)| < \varepsilon,$$

sauf sur un ensemble E_n, variable avec n mais dont la mesure reste, quel que soit $n > N$, inférieure à η.

$X(t)$ sera dite *limite en mesure* de la suite (6).

Il est clair que l'on peut modifier $X(t)$ d'une façon quelconque sur un ensemble de mesure nulle sans modifier sa propriété d'être limite en mesure de (6). Inversement d'ailleurs, si deux fonctions $X(t)$, $X'(t)$ sont limites en mesure de la même suite (6), elles ne peuvent différer *que sur un ensemble de mesure nulle.*

Soit en effet E l'ensemble des points où $X(t)$ et $X'(t)$ sont différentes et $E(\varepsilon)$ l'ensemble des points où $|X - X'| \geqq \varepsilon$. Prenons une suite de valeurs $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p, \ldots,$ tendant vers zéro. Tous les points E se retrouvent dans l'ensemble formé par les points de

$$E(\varepsilon_1), \quad E(\varepsilon_2), \quad \ldots, \quad E(\varepsilon_p), \quad \ldots.$$

Or, d'après la convergence en mesure, l'inégalité

$$|X'(t) - X(t)| \leqq |X(t) - x_n(t)| + |X'(t) - x_n(t)|,$$

où l'on prend n assez grand, prouve que $|X' - X|$ est inférieur à ε_p sauf sur un ensemble dont les points peuvent être enfermés dans une

(¹) *Cf.* Fréchet, [47].

infinité dénombrable d'intervalles dont la somme des longueurs η_p est arbitrairement petite. Prenant la série $\eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_p + \ldots$ convergente et de somme arbitrairement petite, on voit que la même propriété appartient à E.

En résumé *la limite en mesure* X(t) *n'est définie qu'en faisant abstraction des valeurs sur un ensemble, d'ailleurs quelconque, de mesure nulle. Mais nous allons voir que l'intégrale correspondante est bien définie.*

26. **Intégrale d'une fonction bornée.** — Soit une suite de *fonctions simples* $x_1(t)$, $x_2(t)$, $\ldots$, $x_n(t)$, $\ldots$ bornées en module dans leur ensemble par un nombre H et qui converge en mesure vers X(t). La fonction X(t) peut évidemment être prise bornée en module par le nombre H.

La suite des intégrales $\int_a^b x_n(t)\,dt$ *est convergente.*

Prenons en effet m et n tous deux supérieurs à N; on peut affirmer que

$$|x_n - x_m| \leqq |x_n - \mathrm{X}| + |x_m - \mathrm{X}| < 2\varepsilon,$$

sauf sur un ensemble E′ appartenant à l'ensemble $\mathrm{E}_m + \mathrm{E}_n$ et dont la mesure est donc inférieure à 2η. Mais, d'après la nature simple de x_n et x_m, les points de E′ forment un nombre fini d'intervalles dont la longueur sera moindre de 2η.

Donc

$$\left|\int_a^b (x_n - x_m)\,dt\right| < 2(b-a)\varepsilon + 4\eta\mathrm{H}$$

arbitrairement petite avec $\frac{1}{\mathrm{N}}$, puisqu'il en est ainsi de ε et η.

Il est naturel, dans ces conditions, de poser *par définition*

$$\int_a^b \mathrm{X}(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b x_n(t)\,dt$$

sous réserve de vérifier que :

a. Si X(t) est une fonction simple, la définition précédente n'est pas contradictoire;

b. La limite au second membre ne dépend pas de la suite $x_n(t)$ considérée, pourvu qu'elle converge en mesure vers la même X(t).

Or le premier point est évident en reprenant, pour x_n et X, le raisonnement qui vient d'être fait pour x_m et x_n. Pour établir b on raisonnera de même sur x_m et y_n [$y_n(t)$ appartenant à la seconde suite qui converge en mesure vers X(t)].

27. La fonctionnelle *intégrale définie* est ainsi déterminée dans le champ ($\mathfrak{L}$) des fonctions bornées qui peuvent être obtenues comme limite en mesure de suite de fonctions simples.

Le champ ($\mathfrak{L}$) est d'ailleurs clos en ce sens que l'opération qui consiste à prendre une limite en mesure ne fait pas sortir du champ. Vérifions en effet que :

Étant donnée une suite $X_1(t)$, $X_2(t)$, ..., $X_n(t)$, ... *de fonctions quelconques du champ* ($\mathfrak{L}$) *bornées en module par le nombre* M *et convergente en mesure vers une fonction* X(t) :

1° *Cette dernière fonction appartient au champ* ($\mathfrak{L}$);

2° *On a*

$$\int_a^b X(t)\,dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b X_n(t)\,dt.$$

La première partie résulte de ce que l'on peut associer à $X_n(t)$ une fonction simple $x_n(t)$ telle que

$$|X_n(t) - x_n(t)| < \frac{1}{n},$$

sauf aux points d'un ensemble E'_n dont la mesure est inférieure à $\frac{1}{n}$. On peut d'ailleurs admettre que $|x_n(t)| < 2M$ car, dès que n est assez grand, les points où $|x_n| > 2M$ appartiennent à E'_n et il est loisible d'y modifier la valeur de x_n. Dans ces conditions

$$|X - x_n| < \varepsilon + \frac{1}{n},$$

sauf aux points d'un ensemble contenu dans $E_n + E'_n$ et dont la mesure est donc inférieure à $\eta + \frac{1}{n}$. X(t) appartient donc au champ ($\mathfrak{L}$).

La deuxième partie sera conséquence immédiate du lemme suivant : deux fonctions du champ ($\mathfrak{L}$), X(t) et Y(t), bornées toutes deux en module par H et telles que $|X - Y| < \varepsilon$ sauf aux points d'un

ensemble E dont la mesure est inférieure à η sont telles que

$$(7) \qquad \left| \int_a^b \mathrm{X}(t)\,dt - \int_a^b \mathrm{Y}(t)\,dt \right| < (b-a)\varepsilon + 2\mathrm{H}\eta,$$

lemme qui est évident en introduisant les fonctions simples qui convergent en mesure vers $\mathrm{X}(t)$ et $\mathrm{Y}(t)$.

28. Les règles usuelles du calcul des intégrales définies s'appliquent pour la définition précédente. Par exemple :

α. *Si* $\mathrm{X}(t)$ *est une fonction du champ* $(\mathcal{L})$ *partout positive ou nulle, il en est de même de son intégrale définie.*

β. $\mathrm{X}(t)$ *et* $\mathrm{Y}(t)$ *étant deux fonctions du champ* $(\mathcal{L})$, *leur somme appartient au même champ et a pour intégrale la somme des intégrales de* $\mathrm{X}(t)$ *et* $\mathrm{Y}(t)$.

β'. *Énoncé analogue à* β *pour une différence ou, en général, une combinaison linéaire, à coefficients constants, de fonctions du champ* $(\mathcal{L})$ *(en nombre fini).*

D'autre part étant donnée une fonction $\mathrm{X}(t)$ du champ $(\mathcal{L})$ nous dirons qu'on la borne supérieurement (ou inférieurement) au nombre c si on ramène sa valeur à c pour tous les t qui sont tels que

$$\mathrm{X}(t) > c \qquad (\mathrm{X}(t) < c).$$

γ. *La nouvelle fonction obtenue appartient au champ* $(\mathcal{L})$ *et l'intégrale ne peut que diminuer (augmenter)* (¹).

29. Il est aisé de relier aux notions précédentes celle de mesure d'un ensemble due sous sa forme première à M. Borel, puis de passer à la définition de l'intégrale due à M. Lebesgue (²).

A tout ensemble E de points du segment (a, b) associons une fonction $\mathrm{E}(t)$ nulle sauf aux points de E où elle prend la valeur 1 ; on sait que la mesure de l'ensemble doit être l'intégrale

$$\text{mes. E} = \int_a^b \mathrm{E}(t)\,dt.$$

(¹) Pour s'en rendre compte, on notera qu'en bornant de même au nombre c une fonction $x(t)$, fonction simple d'approximation en mesure de X, $|\mathrm{X}(t) - x(t)|$ ne peut que diminuer.

(²) *Cf.* [68].

Nous pouvons donc dire que l'ensemble E est mesurable si $E(t)$ appartient au champ ($\mathcal{L}$). Son complémentaire E_c (ensemble des points du segment qui n'appartiennent pas à E) a pour fonction associée $1 - E(t)$, il est donc également mesurable et sa mesure vaut (*cf.* β').

$$b - a - \text{mes. } E.$$

Il convient de vérifier, et le lecteur le fera sans peine, qu'il n'y a nulle contradiction entre la définition précise qui vient d'être donnée de la *mesure d'un ensemble* et la notion, introduite au début du n° 25, *d'ensemble dont la mesure est inférieure à un certain nombre.*

Faisons aussi la remarque suivante. Soit $x(t)$ une fonction simple qui approche en moyenne $E(t)$, on a

$$|E(t) - x(t)| < \varepsilon,$$

sauf aux points d'un ensemble de mesure inférieure à η. Puisque $E(t)$ ne prend que les valeurs 0 et 1, la fonction simple $x(t)$ prendra, dans les divers intervalles (où elle est constante) des valeurs comprises entre $\pm\varepsilon$ ou $1 \pm \varepsilon$. En ramenant ces valeurs respectivement à 0 et 1, on aura une nouvelle fonction simple $y(t)$ telle que

$$E(t) - y(t) = 0,$$

sauf aux points d'un ensemble de mesure inférieure à η. On passe facilement de là à la définition habituelle de la mesure.

Étant donnés des ensembles en nombre fini ou dénombrable $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots$ l'ensemble somme (formé de tous les points qui appartiennent à l'un des E_i) a pour fonction associée la somme des fonctions $E_i(t)$, qu'il faut borner supérieurement à 1 si les ensembles ont des points communs. On en tire aisément l'énoncé classique, qu'il suffira de rappeler

δ. *L'ensemble somme* $E = E_1 + E_2 + \ldots + E_n + \ldots$ *est mesurable et l'on a*

$$\text{mes. } E \leqq \text{mes. } E_1 + \text{mes. } E_2 + \ldots + \text{mes. } E_n + \ldots,$$

l'égalité ayant sûrement lieu quand les E_i *sont sans points communs deux à deux.*

On vérifie de même que :

ε. *Soit* E′ *l'ensemble des points qui appartiennent à tous les* $E_i (i = 1, 2, \ldots)$. *Il est mesurable, sa mesure étant au plus égale à la borne inférieure des* mes. E_i. *Sa mesure est d'ailleurs égale à la borne inférieure en question si chaque* E_i *contient tous ceux d'indices plus grands.*

30. Convenons alors, avec M. Lebesgue, qu'une fonction $X(t)$, *bornée ou non*, sera dite mesurable si, quel que soit le nombre l, l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $X(t) > l$ [1] est mesurable. Les fonctions mesurables seront dites appartenir au champ $(\mathfrak{M})$. Il est aisé de voir que *toute fonction bornée du champ* $(\mathfrak{M})$ *appartient au champ* $(\mathfrak{L})$.

Pour s'en rendre compte il suffit de montrer qu'on peut approcher en mesure une telle fonction $X(t)$ par des fonctions simples. Or, admettons qu'on ait constamment

$$m < X(t) < M$$

et divisons l'intervalle (m, M) en intervalles partiels d'étendue moindre de 2ε. L'un de ces intervalles partiels, numéroté i est noté $m_i m_{i+1}$

$$(m_{i+1} - m_i < 2\varepsilon)$$

et nous désignons par E_i l'ensemble (mesurable) des points t pour lesquels $m_i \leqq X(t) < m_{i+1}$. En introduisant la fonction associée $E_i(t)$ et en désignant par μ_i la moyenne entre m_i et m_{i+1} on a évidemment

$$\left| X(t) - \sum_i \mu_i E_i(t) \right| \leqq \varepsilon,$$

quelque soit t. On se rend compte d'ailleurs aisément que chaque $E_i(t)$ peut être approché par une fonction simple $e_i(t)$ avec

$$E_i(t) - e_i(t) = 0,$$

sauf en des points formant un ensemble dont la mesure est inférieure à η_i donné arbitrairement. La fonction

$$\sum_i \mu_i e_i(t)$$

approche alors en mesure $X(t)$.

---

[1] Auquel cas, d'ailleurs, seront aussi mesurables les ensembles pour lesquels

$$X(t) \leq l, \qquad X(t) = l, \qquad l < X(t) < l', \qquad \ldots.$$

Désignant par l_i la mesure de E_i, on vérifie de suite que

$$\left|\int_a^b \sum_i \mu_i e_i(t)\,dt - \sum_i \mu_i l_i\right| < 2\mathrm{H}\sum_i \eta_i = 2\mathrm{H}\eta$$

[d'après (7) du n° 27]. Prenons alors une suite de subdivisions de l'intervalle (m, M) telles que les valeurs correspondantes de ε tendent vers zéro et associons à chacune une fonction simple

$$\sum_i \mu_i e_i(t)$$

choisie de façon que $\eta = \Sigma\eta_i$ tende aussi vers zéro. Il est clair que l'intégrale

$$\int_a^b \mathrm{X}(t)\,dt,$$

définie comme il a été dit au n° 26, est aussi la limite de

$$\sigma = \sum_i \mu_i l_i.$$

Nous retrouvons ainsi, pour les fonctions mesurables bornées, la définition même de M. Lebesgue.

31. D'après le n° 27, si une fonction $\mathrm{X}(t)$ peut être définie comme limite en mesure d'une suite de fonctions $\mathrm{X}_n(t)$, bornées dans leur ensemble et mesurables, son intégrale est la limite de l'intégrale de $\mathrm{X}_n(t)$.

Une question se pose naturellement ici. Peut-on, dans l'énoncé précédent, remplacer la limite en mesure par une limite prise au sens ordinaire? La réponse est affirmative, comme cela résulte immédiatement du lemme suivant :

Lemme I. — *Étant donnée la suite des fonctions mesurables, bornées ou non,* $\mathrm{X}_n(t)$, *suite convergente dans* (a, b) *vers* $\mathrm{X}(t)$, *on aura*

$$|\mathrm{X}_n(t) - \mathrm{X}(t)| < \varepsilon,$$

dès que $n > \mathrm{N}$ *sauf sur un ensemble* $\mathrm{E_N}$ *dont la mesure tend vers zéro avec* $\frac{1}{\mathrm{N}}$.

$X(t)$ est mesurable (cela résulte de δ et ε, n° 29).

Désignons par e_p l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles $|X_p(t) - X(t)| < \varepsilon$ et par $\mathcal{E}_p$ l'ensemble commun à tous les $e_p, e_{p+1}, e_{p+2}, \ldots$. L'ensemble $\mathcal{E}_1 + (\mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_1) + (\mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2) + \ldots$ contient tout (a, b). On peut donc prendre assez de termes dans la série pour que la somme des mesures de ces termes, qui est mes. $\mathcal{E}_N$, diffère de $b - a$ d'aussi peut que l'on veut. A ce moment on aura

$$|X_n(t) - X(t)| < \varepsilon$$

pour $n > N$, sauf sur le complément de $\mathcal{E}_N$ qui a une mesure arbitrairement petite.

Si la suite des $X_n(t)$ est bornée, X appartient au champ ($\mathfrak{L}$) et

$$X(t) = \lim_{n \to \infty} X_n(t),$$

la limite étant prise au sens usuel, entraîne

$$\int_a^b X(t)\,dt = \lim_{n \to \infty} \int_a^b X_n(t)\,dt;$$

c'est là une propriété très importante de l'intégrale de Lebesgue.

32. Fonctions sommables. — Il reste à indiquer la définition donnée par M. Lebesgue pour l'intégrale des fonctions mesurables non bornées.

Soit $X(t)$ une telle fonction, bornons-la supérieurement au nombre d et inférieurement au nombre c, nous obtenons la fonction mesurable bornée

$$X(t, c, d)$$

définie par

$$\begin{aligned} X(t, c, d) &= X(t) && \text{si } c < X(t) < d, \\ X(t, c, d) &= d && \text{si } X(t) \geq d, \\ X(t, c, d) &= c && \text{si } X(t) \leq c. \end{aligned}$$

Ceci posé, si

$$J(c, d) = \int_a^b X(t, c, d)\,dt$$

tend vers une limite J *lorsque c et d tendent vers* $-\infty$ *et* $+\infty$ *suivant des lois quelconques, la fonction* $X(t)$ *sera dite sommable et on aura, par définition,*

$$\int_a^b X(t)\,dt = J.$$

33. Pour la suite, il est utile de rappeler les propriétés suivantes :

ζ. *La somme de deux fonctions sommables est également sommable et les intégrales s'ajoutent.*

ζ'. *Propriété analogue pour une combinaison linéaire de fonctions sommables.*

η. *Étant donnée une fonction sommable* $X(t)$ *et la fonction* $X_1(t)$ *égale à* $X(t)$ *quand elle est positive, nulle quand* $X(t)$ *est négative,* $X_1(t)$ *est sommable.*

Cela résulte de la considération de l'intégrale $J(c, d)$ où c est pris nul et où d tend vers l'infini. Par suite :

θ. *Si* $X(t)$ *est sommable il en est de même de* $|X(t)|$.

La réciproque est d'ailleurs vraie, pourvu que l'on sache que $X(t)$ est mesurable.

On notera enfin

τ. *Si* $X(t)$ *est sommable, il en est de même de* $\sqrt{|X(t)|}$; cela résulte d'inégalités évidentes entre les intégrales $J(c, d)$ correspondantes envisagées pour $c = 1$, d tendant vers $+\infty$, et pour $d = -1$, c tendant vers $-\infty$.

34. Le résultat de la fin du n° 31 sur l'intégrale d'une fonction définie comme limite d'une suite bornée de fonctions mesurables ne s'applique pas à la limite d'une suite de fonctions sommables.

Pour étudier la question nous avons besoin de définir l'intégrale d'une fonction $X(t)$ sur un ensemble E mesurable et quelconque de points du segment a, b. Envisageons la fonction $Y(t)$ égale à $X(t)$ si t appartient à E, nulle si E appartient à l'ensemble complémentaire E_c. $Y(t)$ est évidemment mesurable et, en comparant les sommes σ de Lebesgue (fin du n° 30) relatives à $X(t)$ et $Y(t)$, on reconnaît que, si $X(t)$ est sommable, il en est de même de $Y(t)$. Par définition nous écrirons

$$\int_a^b Y(t)\,dt = \int_E X(t)\,dt :$$

c'est *l'intégrale définie de la fonction sommable* $X(t)$ *sur l'ensemble* E.

Toujours par comparaison des sommes σ et en admettant que E

dépende d'un paramètre ε de telle façon que sa mesure tende vers $b-a$ quand ε tend vers zéro, on a le

Lemme II. *Si* $X(t)$ *est sommable, on a*

$$\lim_{\varepsilon=0}\int_{E(\varepsilon)} X(t)\,dt=\int_a^b X(t)\,dt.$$

D'où enfin

Lemme III. $X(t)$ *étant mesurable et telle que*

$$\int_{E(\varepsilon)} |X(t)|\,dt$$

existe et soit bornée pour ε *tendant vers zéro*, $X(t)$ *est sommable et*, d'après le lemme précédent,

$$\int_a^b X(t)\,dt=\lim_{\varepsilon=0}\int_{E(\varepsilon)} X(t)\,dt.$$

Ces préliminaires permettent enfin d'établir le résultat suivant, que nous avions en vue :

Si les fonctions $X_n(t)$, *sommables sur* (a, b), *ont une fonction limite, au sens habituel*, $X(t)$ *et si les intégrales*

$$\int_a^b |X_n(t)|\,dt$$

sont bornées par un nombre M, *quel que soit* n, *la fonction* $X(t)$ *est sommable.*

D'après le lemme I on a en effet $|X_n(t)-X(t)|<\varepsilon$ pour $n>N$, sauf sur l'ensemble E_N dont la mesure tend vers zéro avec $\frac{1}{N}$. La fonction $X_n(t)-X(t)$ est intégrable sur E_N, de même $X_n(t)$ donc aussi $X(t)$ et $|X(t)|$. Or

$$\int_{E_N} |X(t)|\,dt\leqq\int_{E_N} |X_n(t)|\,dt+\int_{E_N} |X(t)-X_n(t)|\,dt\leqq M+\varepsilon(b-a),$$

d'où, d'après le lemme III, l'existence de

$$\int_a^b X(t)\,dt.$$

Le théorème précédent ne permet pas d'affirmer que $\int_a^b X(t)\,dt$ *est la limite de* $\int_a^b X_n(t)\,dt$. Et il est facile de voir en prenant des cas particuliers (par exemple $X_n(t) = ne^{-nt}$) qu'il n'en est pas toujours ainsi.

V. — AUTRE DÉFINITION DE LA DISTANCE DANS LE CHAMP FONCTIONNEL : DISTANCE EN MOYENNE. CONTINUITÉ EN MOYENNE.

35. Si nous revenons au cas d'un espace à n dimensions, la distance euclidienne de deux points $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sera une grandeur d telle que

$$d^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2. \tag{8}$$

Un voisinage du point $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ est alors obtenu en limitant d, mais on peut aussi le définir d'autres façons, pratiquement équivalentes, par exemple en limitant toutes les différences $|x_i - y_i|$: au point de vue géométrique cela revient à définir respectivement le voisinage par une hypersphère ou par un hyperparallélipipède de centre $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. La définition de la distance fonctionnelle donnée au n° 17 se rattache au second point de vue; elle est à certains égards la plus simple mais il eut été également naturel, partant de (8) et appliquant le principe de passage du discontinu au continu, de définir la distance fonctionnelle de deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ par la racine carrée de l'intégrale

$$\int_a^b [f(t) - g(t)]^2\,dt; \tag{9}$$

c'est *la distance en moyenne* que nous allons maintenant étudier.

36. Dans l'espace à n dimension la distance de deux points [définie par (8) ou bien définie par le maximum des $|x_i - y_i|$] n'est nulle que si les deux points coïncident. Les distances fonctionnelles élémentaires envisagées au paragraphe 3 sont de même nulles dans le seul cas où les fonctions considérées sont identiques : elles vérifient ainsi

la deuxième des conditions posées au n° 2 pour toute *distance* dans un espace abstrait quelconque. La distance en moyenne ne vérifie pas cette condition : elle sera nulle *dès que $f(t)$ et $g(t)$ ne diffèrent entre elles de zéro qu'aux seuls points d'un ensemble de mesure nulle.*

C'est là un inconvénient auquel on pallie en faisant la convention suivante, qu'il convient d'accepter dans presque toutes les questions où intervient la distance en moyenne :

Deux fonctions $f(t)$, $g(t)$ ne seront pas considérées comme différentes si $f(t) - g(t)$ n'est différent de zéro qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle.

37. Pour l'intégrale définie qui figure dans (9) il est naturel d'adopter la définition la plus large possible, c'est-à-dire celle de M. Lebesgue. Remarquons d'autre part que si une fonction est sommable il n'est pas forcé que son carré soit également sommable. Par contre d'après θ et τ du n° 33, si une fonction est mesurable et de carré sommable, elle est elle-même sommable ainsi que sa valeur absolue.

Nous nous bornerons au champ ($\mathcal{H}$) des fonctions *mesurables et de carré sommable;* on va voir que dans ce champ il n'y a pas de difficultés à prendre la distance en moyenne.

Deux fonctions $f(t)$ et $g(t)$ appartenant au champ ($\mathcal{H}$), on vérifie sans peine que leur produit est sommable et que l'on a l'inégalité de Schwarz

$$\left| \int_a^b f(t) g(t) \, dt \right|^2 \leq \int_a^b f^2(t) \, dt \int_a^b g^2(t) \, dt. \tag{10}$$

Toute combinaison linéaire de f et g a donc aussi son carré sommable; en particulier

$$\int_a^b [f(t) - g(t)]^2 \, dt$$

qui, par définition, donne le carré de la distance en moyenne de $f(t)$ et $g(t)$. *L'espace fonctionnel* ($\mathcal{H}$) *est donc distanciable en prenant pour distance*

$$(f, g) = \sqrt{\int_a^b [f(t) - g(t)]^2 \, dt},$$

distance en moyenne. On adopte, bien entendu, la convention de la fin du n° 36.

38. Dans le champ ($\mathcal{H}$) ainsi distancié, la définition de la convergence sera évidemment la suivante (*cf.* n° 2); une suite $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., tend vers $f(t)$ si

$$\lim_{n=\infty} \int_a^b [f_n(t) - f(t)]^2 \, dt = 0;$$

on dit alors qu'il y a *convergence en moyenne* vers $f(t)$.

Il est clair alors que toutes les conditions posées au n° 2 pour la distance abstraite seront satisfaites par la distance fonctionnelle en moyenne. Notons seulement que pour établir rapidement l'inégalité

$$(11) \qquad (f, g) \leqq (f, h) + (g, h),$$

où $h(t)$ est une troisième fonction du champ ($\mathcal{H}$), on remarquera que l'on peut toujours supposer $h(t)$ nulle et l'on se ramène alors à l'inégalité de Schwarz. Observons aussi que (11) entraîne la suivante

$$(12) \qquad (f, g)^2 \leqq 2(f, h)^2 + 2(g, h)^2$$

qui se ramène à l'inégalité entre nombres

$$(a + b)^2 \leqq 2a^2 + 2b^2$$

et qui est souvent d'un emploi commode.

Un *voisinage en moyenne* de $f(t)$ pour le nombre ε sera l'ensemble de toutes les fonctions $g(t)$ telle que

$$(f, g) < \varepsilon.$$

Enfin une fonctionnelle $U[f(t)]$ sera *continue en moyenne si, lorsque $f_n(t)$ tend en moyenne vers $f(t)$,* $U[f_n(t)]$ *tend vers* $U[f(t)]$.

39. Quand la suite $f_n(t)$ converge *en moyenne* vers $f(t)$ il est évident, d'après (11) ou (12), que

$$(13) \qquad \lim_{m,\, n=\infty} \int_a^b [f_m(t) - f_n(t)]^2 \, dt = 0.$$

Il est intéressant pour la suite d'établir que *l'espàce fonctionnel* ($\mathcal{H}$) *est complet*, c'est-à-dire qu'on y a une généralisation du critère de Cauchy :

Si une suite $f_n(t)$ vérifie (13) *elle converge en moyenne vers une fonction $f(t)$ appartenant à* ($\mathcal{H}$) et qui n'est définie, bien entendu, qu'en faisant abstraction de ses valeurs sur un ensemble de mesure nulle ([1]).

Pour établir ce fait, nous passerons par l'intermédiaire de la convergence en mesure. D'après (13) on voit que, ε et η étant choisis arbitrairement petits on aura, dès que m et n sont assez grands,

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon,$$

sauf sur un ensemble de mesure inférieure à η. On s'en rend compte en observant que, d'après la définition même de l'intégrale, si

$$\int_a^b [f_m(t) - f_n(t)]^2 \, dt < \alpha,$$

il est certain que

$$|f_m(t) - f_n(t)|$$

ne peut dépasser une limite β que sur un ensemble de points dont la mesure est inférieure à $\frac{\alpha}{\beta^2}$; on prendra m et n assez grands pour que α soit égal à $\eta\varepsilon^2$ puis $\beta = \varepsilon$.

40. Montrons ensuite que, étant donné une suite $f_n(t)$ telle que, ε et η étant arbitrairement petits, on ait

$$|f_m(t) - f_n(t)| < \varepsilon,$$

sauf sur un ensemble de mesure inférieure à η dès que m et n sont assez grands, cette suite $f_n(t)$ converge en mesure vers une fonction $f(t)$.

Pour définir $f(t)$ nous prendrons l'entier N_1 tel que, pour $m > N_1$, on ait

$$|f_m(t) - f_{N_1}(t)| < \varepsilon_1,$$

sauf sur un ensemble de mesure inférieure à η_1; puis, k étant un nombre inférieur à l'unité, nous prendrons N_2 de façon que

$$|f_m(t) - f_{N_2}(t)| < k\varepsilon_1 \qquad (m > N_2),$$

sauf sur un ensemble de mesure inférieure à η_2, ...; en général

---

([1]) *Cf.* Riesz, [91].

pour $m > N_p$, on aura

$$|f_m(t) - f_{N_p}(t)| < k^{p-1}\varepsilon_1,$$

sauf sur un ensemble d'étendue inférieure à η_p.

La suite

(14) $$f_{N_1}(t),\quad f_{N_2}(t),\quad \ldots,\quad f_{N_p}(t),\quad \ldots$$

est convergente, au sens usuel, en même temps que la série

$$f_{N_1}(t) + [f_{N_2}(t) - f_{N_1}(t)] + \ldots + [f_{N_{p+1}}(t) - f_{N_p}(t)] + \ldots,$$

dont le terme général est inférieur en module à $k^{p-1}\varepsilon_1$ sauf sur un ensemble E_p de mesure inférieure à η_p.

En tout point t qui n'appartient pas à une infinité d'ensembles E_p la suite (14) a donc une fonction limite $f(t)$. Tout autre point appartient à l'ensemble $\mathcal{E}_p = E_p + E_{p+1} + \ldots$ quel que soit p; l'ensemble correspondant a donc une mesure inférieure à $\eta_p + \eta_{p+1} + \ldots$ quantité qui sera arbitrairement petite avec $\frac{1}{p}$ si, ce qui est toujours possible, on choisit les η_p de façon que la série $\eta_1 + \eta_2 + \ldots$ soit convergente.

Il reste à vérifier que la suite $f_n(t)$ converge en mesure vers la fonction $f(t)$ dont l'existence vient d'être établie. C'est évident car

$$f - f_{N_p} = (f_{N_{p+1}} - f_{N_p}) + (f_{N_{p+2}} - f_{N_{p+1}}) + \ldots,$$

d'où

$$|f - f_{N_p}| < k^{p-1}\frac{\varepsilon_1}{1-k}$$

infiniment petit sauf en des points formant un ensemble dont la mesure est arbitrairement petite avec $\frac{1}{p}$; et il en est de même pour $|f_n - f_{N_p}|$ dès que n dépasse N_p.

41. La fonction $f(t)$ ainsi obtenue est limite de la suite f_{N_p} sauf aux points qui appartiennent à tous les $\mathcal{E}_p$. Or l'ensemble $\mathcal{E}'$ commun à tous les $\mathcal{E}_p$ est évidemment de mesure nulle; en modifiant convenablement les valeurs de $f(t)$ et des $f_{N_p}(t)$ aux points de $\mathcal{E}'$, modification qui est évidemment sans importance, on aura

$$\lim_{p=\infty} f_{N_p}(t) = f(t)$$

en tout point de l'intervalle (a, b), la limite étant prise au sens usuel. La fonction $f(t)$ est donc mesurable.

Pour prouver qu'elle est de carré sommable on appliquera le théorème du n° **34**. L'inégalité (12) du n° **38** conduit à

$$\int_a^b [f_{N_{p+k}}(t)]^2\,dt \leqq 2\int_a^b [f_{N_{p+k}}(t) - f_{N_p}(t)]^2\,dt + 2\int_a^b [f_{N_p}(t)]^2\,dt,$$

et le premier terme au second membre est borné quel que soit k, donc aussi le premier membre.

42. Reste enfin à voir que $f(t)$ est bien la limite en moyenne de la suite $f_n(t)$. Or on a, comme ci-dessus,

$$\int_a^b [f(t) - f_n(t)]^2\,dt \leqq 2\int_a^b [f(t) - f_{N_p}(t)]^2\,dt + 2\int_a^b [f_{N_p}(t) - f_n(t)]^2\,dt.$$

Le second terme à droite peut évidemment être rendu arbitrairement petit. Nous n'avons plus à considérer que l'intégrale

$$(15) \qquad \int_a^b [f(t) - f_{N_p}(t)]^2\,dt.$$

Or, sur le complémentaire d'un ensemble $\mathcal{E}_q$ du n° **40**, la suite $f_{N_1}, f_{N_2}, \ldots,$ converge uniformément vers $f(t)$, de sorte que la partie correspondante de l'intégrale (15) tend vers zéro avec $\frac{1}{p}$. Il reste à établir que l'on peut prendre q assez grand pour que

$$\int_{\mathcal{E}_q} [f(t) - f_{N_p}(t)]^2\,dt$$

soit arbitrairement petit quel que soit p assez grand; mais

$$\int_{\mathcal{E}_q} [f(t) - f_{N_p}(t)]^2\,dt \leqq 2\int_{\mathcal{E}_q} [f(t) - f_m(t)]^2\,dt + 2\int_{\mathcal{E}_q} [f_m(t) - f_{N_p}(t)]^2\,dt;$$

pour m et N_p assez grands le second terme à droite sera arbitrairement petit; m et N_p étant fixés, le premier terme à droite tend vers zéro avec $\frac{1}{q}$ puisque, dans ces conditions, la mesure de $\mathcal{E}_q$ tend vers zéro.

Le théorème du n° 39 est ainsi établi.

CHAPITRE III.

FONCTIONNELLES LINÉAIRES. AUTRES TYPES SIMPLES DE FONCTIONNELLES.

I. — FONCTIONNELLES LINÉAIRES.

1. Après ces considérations générales, nous allons examiner maintenant divers cas particuliers notables et, d'abord, celui des fonctionnelles dites linéaires ou du premier degré (homogène). Les plus simples d'entre elles sont déduites des formes linéaires à n variables

$$P_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_1^n {}_i k_i y_i,$$

en appliquant le procédé général de passage du discontinu au continu (Chap. I, n° 5); elles seront par suite de la forme

$$(1) \qquad F_1\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right] = \int_a^b k(t)y(t)\,dt,$$

où $k(t)$ est une fonction donnée (fonction-coefficient) et où $y(t)$ est fonction-argument. Une fonctionnelle du type (1) sera dite *linéaire* et *régulière*.

En posant

$$(2) \qquad y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t),$$

il vient

$$(3) \qquad F_1[y(t)] = \lambda F_1[y_1(t)] + \mu F_1[y_2(t)].$$

Sous des conditions très larges pour $k(t)$ et pour le champ de variation de l'argument $y(t)$ les fonctionnelles définies par (1) pos-

sèdent la continuité élémentaire d'ordre zéro. On peut d'ailleurs [1] leur attribuer la continuité en moyenne : les fonctions considérées étant prises dans le champ ($\mathcal{H}$) des fonctions mesurables et de carré sommable on a, d'après l'inégalité de Schwarz,

$$|F_1[y_1] - F_1[y_2]| \leqq \sqrt{\int_a^b k^2(t)\,dt \int_a^b [y_1(t) - y_2(t)]^2\,dt}.$$

d'où le résultat.

2. Avec M. Hadamard, nous nommerons *fonctionnelle linéaire* toute fonctionnelle telle que :

a. *Elle soit distributive*, c'est-à-dire

$$U[y_1(t) + y_2(t)] = U[y_1(t)] + U[y_2(t)];$$

b. *c étant une constante quelconque, on ait*

$$U[cy(t)] = c\,U[y(t)].$$

Ces deux conditions entraînent la précédente

$$(3)\qquad U[y(t)] = \lambda\,U[y_1(t)] + \mu\,U[y_2(t)],$$

en posant toujours

$$y(t) = \lambda y_1(t) + \mu y_2(t).$$

L'expression précédente (1) définit bien une fonctionnelle linéaire. Mais il est clair que (1) ne donne pas toutes les fonctionnelles linéaires; elle ne donne même pas toutes celles qui ont la continuité d'ordre zéro.

En effet, considérons par exemple

$$(4)\qquad U[y(t)] = \int_a^b k(t)\,y(t)\,dt + \sum_i \alpha_i\,y(\tau_i),$$

où les τ_i représentent des valeurs fixes choisies entre a et b et les α_i des constantes. Cette fonctionnelle est continue d'ordre zéro si la série $\Sigma|\alpha_i|$ converge, elle ne peut pourtant pas être mise sous la forme (1). Les fonctionnelles de type (4) joueront un rôle assez important dans la suite. L'intégrale au second membre sera dite

---

(1) Fréchet, [33]; Steinhaus, [98].

représenter la *partie régulière* d'une telle fonctionnelle; la série en représente la *partie exceptionnelle* et nous dirons aussi que la fonctionnelle dépend *exceptionnellement* de $y(t)$ aux points *exceptionnels* τ_i; la contribution finie $\alpha_i y(\tau_i)$ apportée par chacun de ces points à la fonctionnelle est d'un ordre de grandeur plus élevé que la partie infinitésimale $k(t)y(t)\,dt$ venant d'un autre point du segment (a, b).

De même

$$(5) \qquad \mathrm{U}[y(t)] = \int_a^b k(t)y(t)\,dt + \sum_i \alpha_i y(\tau_i) + \sum_j \beta_j y'(\theta_j)$$

sera fonctionnelle linéaire avec $\left(\text{si } \sum_j |\beta_j| \text{ converge}\right)$ la continuité élémentaire d'ordre un; sa *partie exceptionnelle* comporte des termes où figure la dérivée première de y calculée aux points exceptionnels θ_i. Il sera facile de définir de même des fonctionnelles linéaires ayant une continuité élémentaire d'ordre quelconque.

3. Les types précédents de fonctionnelles linéaires sont assez généraux pour la plupart des applications. Ils n'épuisent pourtant pas tous les cas possibles.

Nous avons donc à examiner ici le problème de la représentation analytique de toutes les fonctionnelles linéaires. Ce problème n'est bien posé et ne peut être traité qu'en précisant le champ fonctionnel de définition et le mode de continuité des fonctionnelles cherchées.

4. Rappelons au préalable quelques propriétés simples des fonctionnelles linéaires et *continues* [1], en admettant, pour fixer les idées, qu'il s'agisse de la continuité élémentaire d'ordre zéro.

Si une fonctionnelle linéaire est continue pour une valeur $y_1(t)$ de la fonction-argument, c'est que

$$(6) \qquad \mathrm{U}[y_2(t)] - \mathrm{U}[y_1(t)]$$

tend vers zéro avec la distance (y_1, y_2). Or en posant

$$\delta y = y_2 - y_1,$$

[1] *Cf.* F. Riesz, [92].

la différence (6) est égale

$$U[\delta y(t)]$$

et doit tendre vers zéro avec $\max |\delta y(t)|$.

La condition ainsi obtenue ne dépend plus de la fonction-argument $y_1(t)$ de sorte que : *la continuité pour une valeur de l'argument entraîne la continuité pour toute valeur de cet argument.*

Désignons d'autre part comme *domaine borné* du champ fonctionnel de définition de U la portion de ce champ caractérisée par le fait que

$$\max |y(t)|$$

reste inférieur à un nombre M. Nous allons voir que :

Toute fonctionnelle linéaire et continue est bornée dans un domaine borné du champ fonctionnel.

Sinon, en effet, on pourrait trouver une suite de fonctions $y_k(t)$ telles que

$$\max |y_k(t)| < M$$

et

$$|U[y_k(t)]| > k^2 \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Mais alors la série

$$\sum_1^{\infty} {}_k \frac{y_k(t)}{k^2} \times \text{signe de } U[y_k]$$

convergerait uniformément vers une fonction du champ $y^*(t)$ et l'on aurait

$$U[y^*(t)] = \sum_k \frac{|U[y_k(t)]|}{k^2},$$

ce qui est absurde.

Remarquons enfin que le fait que U est bornée en module par le nombre P dans un domaine du champ fonctionnel

$$\max |y(t)| < M$$

entraîne, d'après la propriété b du n° 2, que

$$(7) \qquad |U[y(t)]| \leqq \frac{P}{M} \max |y(t)|,$$

quelle que soit $y(t)$. Il en résulte que la fonctionnelle U est continue au voisinage de $y(t) \equiv 0$, donc pour toute valeur de l'argument $y(t)$.

Il est donc équivalent de dire que la fonctionnelle linéaire est continue ou de dire qu'elle est bornée pour tout domaine borné du champ fonctionnel.

Toutes ces propriété, établies ici pour la continuité d'ordre zéro, s'étendent, *mutatis mutandis*, aux autres types de continuité.

5. Revenons au problème, posé dans le n° 3, de la représentation analytique des fonctionnelles linéaires. Une première solution fut donnée par M. Hadamard en 1903 [1]. Elle s'applique aux fonctionnelles linéaires définies pour les fonctions continues et ayant la continuité élémentaire d'ordre zéro; elle s'appliquerait aussi au cas où l'on admet seulement la continuité élémentaire d'un ordre p quelconque.

La fonctionnelle cherchée étant linéaire, si

$$y(t) = \sum_i k_i y_i(t),$$

on a

$$U[y(t)] = \sum_i k_i U[y_i(t)]$$

et, passant de la somme à une intégrale, on a

$$U\left[\int_a^b f(\lambda) y_\lambda(t)\, d\lambda\right] = \int_a^b f(\lambda)\, U[y_\lambda(t)]\, d\lambda.$$

Ramenons l'intervalle (a, b) à $(0, 1)$ et prenons en particulier

$$(8) \qquad y_\mu(t) = \frac{\int_0^1 e^{-\mu^2(\lambda-t)^2} y(\lambda)\, d\lambda}{\int_0^1 e^{-\mu^2(\theta-t)^2}\, d\theta},$$

expression dans laquelle $y(\lambda)$ joue le rôle qu'avait plus haut $f(\lambda)$. Il vient, d'après (8),

$$U[y_\mu(t)] = \int_0^1 y(\lambda)\, F(\lambda, \mu)\, d\lambda$$

---

(1) *Cf.* [60] et [61].

avec

$$F(\lambda, \mu) = U\left[\frac{e^{-\mu^2(\lambda-t)^2}}{\int_0^1 e^{-\mu^2(\theta-t)^2}\,d\theta}\right],$$

qui est indépendante de l'argument variable $y(t)$. Mais il est classique que $y_\mu(t)$ tend uniformément vers $y(t)$ quand μ tend vers l'infini. Nous aurons donc, à cause de la continuité postulée pour la fonctionnelle

$$(9) \qquad U[y(t)] = \lim_{\mu=\infty} U[y_\mu(t)] = \lim_{\mu=\infty} \int_0^1 F(\lambda, \mu)\,y(\lambda)\,d\lambda.$$

Telle est la formule générale de M. Hadamard : mais il est clair que la représentation ainsi obtenue n'est pas unique. Toute formule analogue à (8) et donnant, sous forme d'intégrale où figure $y(t)$, une fonction $y_\mu(t)$ qui tend uniformément vers $y(t)$ pour μ infini, donnera pour $U[y]$ une expression analytique analogue à (9) avec une $F(\lambda, \mu)$ convenablement choisie.

6. Une autre expression des fonctionnelles linéaires a été donnée par M. F. Riesz ([1]). Elle suppose seulement la fonctionnelle linéaire *définie pour les fonctions continues dans l'intervalle* (a, b) *et possédant la* continuité élémentaire d'ordre zéro, donc bornée. Mais comme la démonstration utilisera des fonctions ayant des discontinuités de première espèce, il convient d'abord de prolonger à de telles fonctions la définition de la fonctionnelle.

C'est ce qui est aisé par les remarques suivantes : étant donnée une suite de fonctions continues, suite croissante, c'est-à-dire telle que

$$(10) \qquad y_1(t) \leqq y_2(t) \leqq \ldots,$$

quel que soit t, suite ayant une limite $u(t)$ bornée, mais qui n'est pas forcément continue, je dis que, pour $n = \infty$, $U[y_n(t)]$ tend vers une limite. Soit, en effet, la série

$$(11) \qquad |U[y_2] - U[y_1]| + |U[y_3] - U[y_2]| + \ldots.$$

dont les sommes partielles correspondent par l'opérateur U à celles de la série

$$\pm (y_2 - y_1) \pm (y_3 - y_2) \pm \ldots$$

([1]) Riesz, [90] et [95].

avec des signes convenablement choisis. Mais, d'après les inégalités (10), les sommes partielles de la dernière série sont en module inférieure à

$$y_2 - y_1 + (y_3 - y_2) + \ldots = u - y_1$$

bornée supérieurement par un nombre C. Puisque la fonctionnelle U est bornée, les sommes partielles de (11) sont elles-mêmes bornées et la série

$$U[y_1] + (U[y_2] - U[y_1]) + \ldots,$$

dont les sommes partielles sont $U[y_n]$, est absolument convergente; donc $U[y_n]$ a bien une limite.

Par définition cette limite donnera $U[u(t)]$, valeur de la fonctionnelle U lorsque la fonction argument est $u(t)$.

Reste à vérifier qu'une seconde suite $z_n(t)$, également croissante

$$z_1(t) \leqq z_2(t) \leqq \ldots$$

et tendant vers la même limite $u(t)$, donnera

$$(12) \qquad \lim_{n=\infty} U[z_n] = \lim_{n=\infty} U[y_n] = U[u].$$

En effet, en remplaçant au besoin les suites par $y_n(t) - \frac{1}{n}$, $z_n(t) - \frac{1}{n}$, ce qui ne change pas les limites, on peut les prendre croissantes au sens étroit

$$y_1 < y_2 < \ldots, \qquad z_1 < z_2 < \ldots$$

et, y_n étant un élément quelconque de la première suite, on aura, pour m assez grand, $z_m > y_n$, car sinon les points tels que

$$y_n \geqq z_1, \qquad y_n \geqq z_2, \qquad \ldots$$

formeraient une suite d'ensembles dont chacun contient le suivant, ayant donc au moins un point limite pour lequel on aurait $y_n \geqq u$, ce qui est absurde.

De même, m' étant fixé on aura $y_{n'} > z_{m'}$ dès que n' est assez grand. Dans ces conditions on peut extraire des suites y_n et z_n une suite analogue

$$y_{n_1} < z_{n_2} < y_{n_3} < \ldots$$

tendant vers u. On en déduit (12) et cette même égalité permet d'affirmer que la définition de $U[u]$ n'est pas entachée de contradiction dans le cas où $u(t)$ est elle-même continue.

Remarquons enfin que si u et v sont deux fonctions du type considéré (limites de suites croissantes de fonctions continues), $u+v$ est du même type et que

$$U[u+v] = U[u] + U[v];$$

$u-v$ n'est pas forcément du même type, mais il n'y a pas de difficulté à prendre, par définition,

$$U[u-v] = U[u] - U[v],$$

parce que l'égalité

$$u(t) - v(t) = u'(t) - v'(t)$$

entraîne

$$U[u] + U[v'] = U[v] + U[u'],$$

d'où

$$U[u] - U[v] = U[u'] - U[v'].$$

La fonctionnelle U ainsi *prolongée* reste linéaire et l'on vérifie sans peine qu'elle reste également bornée.

7. **Représentation de Riesz.** — Considérons alors la fonction $y_\tau(t)$ égale à 1 pour $a \leqq t \leqq \tau$ et nulle pour $\tau < t \leqq b$, fonction qui appartient au champ fonctionnel ainsi prolongé et posons

$$U[y_\tau(t)] = f(\tau). \tag{13}$$

Cette fonction de τ est *à variation bornée*, ce qui veut dire que, $t_1, t_2, \ldots, t_{n-1}$ étant des points de division quelconques de l'intervalle (a, b), la somme

$$\sigma = |f(t_1) - f(a)| + |f(t_2) - f(t_1)| + \ldots + |f(b) - f(t_{n-1})|$$

est bornée, quelle que soit la subdivision considérée ; on le voit en considérant une fonction $g(t)$ égale à $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ (valant ± 1) dans chacun des intervalles $(a, t_1), (t_1, t_2), \ldots$. On a

$$U[g(t)] = \varepsilon_1\big(f(t_1) - f(a)\big) + \ldots + \varepsilon_n\big(f(b) - f(t_{n-1})\big)$$

qui se réduit à σ pour un choix convenable des ε_i et σ est bornée par M, module maximum de U lorsque la fonction-argument est bornée en module par l'unité.

Soit alors une fonction continue quelconque $y(t)$, nous la remplacerons par $\eta(t)$ définie de la façon suivante : on divise (a, b) en n intervalles partiels et dans chacun d'eux (t_{i-1}, t_i) on prend $\eta(t)$ égale à l'une

des valeurs $y(\bar{t}_i)$ prise par $y(t)$ dans l'intervalle en question. La fonctionnelle étant linéaire, on a

$$U[\eta(t)] = \sum_i y(\bar{t}_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})]$$

et, puisque U est continue,

$$U[y(t)] = \lim U[\eta(t)] = \lim \sum_i y(\bar{t}_i)[f(t_i) - f(t_{i-1})],$$

la limite étant obtenue quand l'amplitude maxima des intervalles partiels tend vers zéro.

Il est naturel de désigner la limite

$$(14) \qquad \sum_i y(\bar{t}_i)\{f(t_i) - f(t_{i-1})\}$$

par la notation

$$\int_a^b y(t)\,df(t),$$

c'est une *intégrale de Stieltjes*, et l'on a ainsi la représentation de Riesz : *Toute fonctionnelle linéaire ayant la continuité élémentaire d'ordre zéro, peut s'exprimer par une intégrale de Stieltjes*,

$$(15) \qquad U[y(t)] = \int_a^b y(t)\,df(t),$$

l'argument $y(t)$ étant supposé continu.

8. L'intégrale du second membre de (15) a d'ailleurs un sens, et définit par suite une fonctionnelle linéaire de y quelle que soit $f(t)$ *à variation bornée*. Pour s'en rendre compte il suffit de reprendre le raisonnement par lequel on établit l'existence de la limite de (14) lorsque $f(t)$ et $y(t)$ sont données quelconques, la première à variation bornée, la seconde continue.

La fonction continue $y(t)$ est uniformément continue, on peut donc prendre les intervalles (t_{i-1}, t_i) assez petits pour que, dans chacun d'eux, l'oscillation de la fonction soit moindre de ε arbitrairement fixé. Subdivisons alors les intervalles (t_{i-1}, t_i) par de nouveaux points de division $t'_{i,1}, t'_{i,2}, \ldots, t'_{i,k}$, le terme général de (14) sera remplacé par la somme

$$y(\overline{t_{i,1}})\{f(t'_{i,1}) - f(t_{i-1})\} + y(\overline{t_{i,2}})\{f(t'_{i,2}) - f(t'_{i,1})\} + \ldots,$$

dont la différence avec le terme correspondant de (14) est évidemment moindre de

$$\varepsilon\{|f(t'_{i,1})-f(t_{i-1})|+|f(t'_{i,2})-f(t'_{i,1})|+\ldots\};$$

en tout la somme (14) subit une variation moindre en valeur absolue que εV, où V est la variation totale de $f(t)$ pour l'intervalle (a, b). Étant donnée enfin une nouvelle subdivision de l'intervalle (a, b) par des points $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1}$, les nouveaux intervalles étant assez petits pour que l'oscillation de $y(t)$ dans chacun d'eux soit encore moindre que ε, la différence entre les deux sommes (14) correspondantes sera inférieure en module à $2\varepsilon V$, comme on le voit en envisageant la subdivision que donne l'ensemble des points t_i et θ_k. Il en suit bien, comme il était annoncé, que (14) tend vers une limite lorsque l'amplitude maxima des intervalles partiels tend vers zéro.

9. Si la fonction $f(t)$ définie par (13) est continue et dérivable dans l'intervalle (a, b), la fonctionnelle se réduit au type

$$U[y(t)]=\int_a^b y(t)f'(t)\,dt,$$

l'intégrale de Stieltjes étant remplacée par une intégrale ordinaire.

Si $f(t)$ a des discontinuités, nécessairement de première espèce (puisqu'elle est à variation bornée) et en nombre fini ou dénombrable, si nous désignons par α_i le saut de la fonction à l'un de ses points de discontinuité τ_i, si enfin la fonction reste dérivable aux autres points de (a, b), la fonctionnelle prendra la forme

$$U[y]=\int_a^b f'(t)y(t)\,dt+\sum_i \alpha_i\,y(\tau_i)$$

dépendant *exceptionnellement* des valeurs de y aux points de discontinuité de $f(t)$.

Dans le cas général, enfin, $f(t)$ peut n'avoir pas de dérivée sur un ensemble de points non dénombrable, mais qui a nécessairement une mesure nulle. La fonctionnelle se décompose alors en trois parties (¹)

(¹) Cette décomposition est due à M. Fréchet, [39].

on a

$$(16)\qquad U[y] = \int_a^b f'(t)y(t)\,dt + \sum \alpha_i y(\tau_i) + \int_a^b y(t)\,d\varphi(\tau).$$

La première est une fonctionnelle régulière, la seconde une partie exceptionnelle, la troisième est un nouvel élément, où figure l'intégrale de Stieltjes de façon essentielle, cette intégrale faisant intervenir une fonction $\varphi(\tau)$ dont la dérivée est nulle, sauf sur un ensemble non dénombrable de mesure nulle.

10. Cas de la continuité en moyenne. — Nous noterons les simplifications qu'apporte l'hypothèse que U possède la continuité en moyenne dans le champ ($\mathcal{H}$). U possède *a fortiori* la continuité d'ordre o dans le champ des fonctions continues de sorte que la formule (16) s'applique, mais elle est réduite au premier terme

$$U[y] = \int_a^b f'(t)y(t)\,dt,$$

car les deux autres termes sont incompatibles avec la continuité en moyenne ([1]).

11. Cas de la continuité élémentaire d'ordre p. — Admettons maintenant que la fonctionnelle U est définie dans le champ des fonctions continues ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre p et qu'elle a la continuité élémentaire correspondante (d'ordre p) ([2]).

La fonction argument $y(t)$ peut alors être mise sous la forme

$$y(t) = y(\tau) + (t-\tau)y'(\tau) + \ldots + \frac{(t-\tau)^{p-1}}{(p-1)!}y^{(p-1)}(\tau) + \int_\tau^t \frac{(t-s)^{p-1}}{(p-1)!}y^{(p)}(s)\,ds$$

(formule de Taylor avec le reste sous forme d'intégrale), τ étant choisi *ad libitum* dans l'intervalle (a, b). La fonctionnelle linéaire $U[y(t)]$ s'écrit alors

$$U[y(t)] = a_0 y(\tau) + a_1 y'(\tau) + \ldots + a_{p-1} y^{(p-1)}(\tau) + V[y^{(p)}(t)]$$

([1]) Fréchet, [33].

([2]) *Cf.* P. Lévy, [75], p. 59.

avec

$$a_i = \mathrm{U}\left[\frac{(t-\tau)^i}{i!}\right]$$

et

$$\mathrm{V}[y^{(p)}(t)] = \mathrm{U}\left[\int_\tau^t \frac{(t-s)^{p-1}}{(p-1)!} y^{(p)}(s)\,ds.\right]$$

Cette dernière expression est fonctionnelle linéaire de $y^{(p)}(t)$, continue d'ordre zéro au sens élémentaire. Elle a donc une représentation

$$\mathrm{V}[y^{(p)}(t)] = \int_a^b y^{(p)}(s)\,df(s),$$

où il est clair que

$$f(s) = \mathrm{U}[y_s(t)],$$

$y_s(t)$ ayant les valeurs suivantes : si $s < \tau$,

$$y_s(t) = \frac{(t-s)^p}{p!} \quad \text{pour} \quad a \leqq t \leqq s,$$

$$y_s(t) = 0 \quad \text{pour} \quad s < t \leqq b;$$

si $s > \tau$,

$$y_s(t) = \frac{(t-\tau)^p}{p!} \quad \text{pour} \quad a \leqq t \leqq s,$$

$$y_s(t) = \frac{(t-\tau)^p}{p!} - \frac{(t-s)^p}{p!} \quad \text{pour} \quad s < t \leqq b.$$

On a donc enfin

$$\mathrm{U}[y(t)] = a_0 y(\tau) + a_1 y'(\tau) + \ldots + a_{p-1} y^{(p-1)}(\tau) + \int_a^b y^{(p)}(s)\,df(s),$$

où l'intégrale de Stieltjes peut, comme plus haut, se décomposer en trois parties.

La représentation ainsi obtenue n'est pas unique puisque les coefficients a_i aussi bien que la fonction f dépendent de τ, qui peut être pris arbitrairement dans l'intervalle (a, b) [1].

II. — FONCTIONNELLES DU SECOND DEGRÉ ET DU DEGRÉ SUPÉRIEUR.

12. Fonctionnelles régulières. — Au début du Chapitre nous sommes passés de la considération des *formes linéaires* à n variables à celle

(1) *Cf.* P. Lévy, [75], p. 60.

des fonctionnelles régulières. De façon analogue nous pouvons passer des fonctions homogènes du second degré à n variables

$$(17) \qquad P_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \sum_r \sum_s k_{rs} y_r y_s$$

aux fonctionnelles $F_2[y(t)]$, que nous nommerons *homogènes et régulières du second degré*, données par l'expression générale

$$(18) \qquad F_2[y(t)] = \int_a^b \int_a^b K(\xi, \eta) y(\xi) y(\eta) \, d\xi \, d\eta,$$

où la *fonction-coefficient* (ou *noyau*) $K(\xi, \eta)$ est donnée.

Dans (17) nous pouvons toujours supposer que $k_{rs} = k_{sr}$, car dans le cas contraire on pourra écrire

$$P_2 = \sum_r \sum_s k'_{rs} y_r y_s$$

avec

$$k'_{rs} = \frac{k_{rs} + k_{sr}}{2}.$$

De même si le noyau $K(\xi, \eta)$ n'est pas symétrique en ξ et η, il suffira d'écrire

$$F_2[y(t)] = \int_a^b \int_a^b K'(\xi, \eta) y(\xi) y(\eta) \, d\xi \, d\eta$$

avec

$$K'(\xi, \eta) = \frac{K(\xi, \eta) + K(\eta, \xi)}{2}$$

pour être amené à un noyau symétrique.

13. Plus généralement nous nommerons fonctionnelle *homogène* et *régulière de degré n* la fonctionnelle donnée par l'expression

$$(19) \qquad F_n[y(t)] = \int_a^b \ldots \int_a^b K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) y(\xi_1) y(\xi_2) \ldots y(\xi_n) \times d\xi_1 \, d\xi_2 \ldots d\xi_n.$$

dans laquelle, comme ci-dessus, nous pouvons sans restreindre la généralité admettre que le *noyau* $K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ est fonction symétrique des variables qui y figurent.

Les fonctionnelles du type de F_n apparaissent comme extension

des formes de degré n pour le cas d'une infinité continue de variables.

14. Nous appliquerons enfin le terme de *fonctionnelle régulière de degré n* aux fonctionnelles telles que

$$G_n[y(t)] = K_0 + F_1[y(t)] + \ldots + F_n[y(t)] \tag{20}$$

qui sont sommes de fonctionnelles homogènes régulières dont le degré le plus élevé est égal à n. Elles généralisent dans le calcul fonctionnel les polynomes de degré n de l'analyse ordinaire.

15. Une propriété notable de ces fonctionnelles régulières de degré n est qu'elles peuvent être utilisées pour obtenir une approximation de n'importe quelle fonctionnelle continue. Nous avons en effet le théorème suivant dû à M. Fréchet ([1]) :

Toute fonctionnelle $G[y(t)]$, *continue d'ordre zéro dans le champ des fonctions continues peut être représentée par l'expression*

$$G\left[y(t)\right]_a^b = \lim_{n=\infty} G_{r_n}[y(t)],$$

c'est-à-dire (G_{r_n} désignant une fonctionnelle régulière de degré r_n)

$$\begin{aligned} G[y(t)] = \lim_{n=\infty} \Bigg[& k_{n,0} + \int_a^b k_{n,1}(\xi_1)y(\xi_1)\,d\xi_1 \\ & + \int_a^b \int_a^b k_{n,2}(\xi_1, \xi_2)y(\xi_1)y(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2 + \ldots \\ & + \int_a^b \ldots \int_a^b k_{n,r_n}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{r_n}) \\ & \times y(\xi_1)\ldots y(\xi_{r_n})\,d\xi_1\ldots d\xi_{r_n} \Bigg], \end{aligned} \tag{21}$$

où les noyaux $k_{n,i}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i)$ *sont des fonctions continues que l'on peut déterminer pour la fonctionnelle* G *indépendamment de la valeur de l'argument* $y(t)$.

Nous donnerons une démonstration due à Gâteaux ([2]). Nous avons déjà vu (Chap. II, n° 22) que la fonctionnelle $F[y(t)]$ continue au sens élémentaire peut être considérée comme limite, pour n infini,

---

([1]) *Cf.* Fréchet, [37].
([2]) *Cf.* Gateaux, [57].

d'une fonction continue $f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, les variables $y_1, y_2 \ldots, y_n$ étant les valeurs que prend $y(t)$ pour les abscisses

$$a + \frac{b-a}{n}, \quad a + \frac{2(b-a)}{n}, \quad \ldots, \quad a + \frac{n(b-a)}{n}.$$

Ce résultat reste évidemment valable si $y_1, y_2 \ldots, y_n$ représentent des valeurs quelconques prises par $y(t)$ dans les intervalles respectifs

$$\left(a, a + \frac{b-a}{n}\right), \quad \left(a + \frac{b-a}{n}, a + \frac{2(b-a)}{n}\right), \quad \ldots.$$

D'autre part, d'après le théorème de Weierstrass sur les fonctions ordinaires, on peut remplacer les fonctions continues $f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ par des polynomes par rapport aux variables $p_{r_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, polynomes d'approximation dont r_n désigne le degré.

Choisissons alors, pour chaque valeur de n une fonction $\alpha_n(t)$ continue dans l'intervalle (a, b), nulle en chacun des points de division

$$a + \frac{i(b-a)}{n} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

positive dans chacun des intervalles que forment ces points et telle que les intégrales

$$\int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} \alpha_n(t)\,dt \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

soient égales à *un*. Nous pouvons profiter de l'indétermination des y_i pour choisir

$$y_i = \int_{a+\frac{i-1}{n}(b-a)}^{a+\frac{i}{n}(b-a)} \alpha_n(t)\,y(t)\,dt$$

et, dans ces conditions, le polynome $p_{r_n}(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ se met sous forme d'une fonctionnelle régulière de degré r_n : c'est ainsi que les termes du premier degré de ce polynome

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n$$

donneront

$$\int_a^b k_{n,1}(t)\,y(t)\,dt,$$

la fonction $k_{n,i}$ étant égale à $c_i \alpha_n(t)$ dans l'intervalle

$$a + \frac{i-1}{n}(b-a), \qquad a + \frac{i}{n}(b-a).$$

Le théorème est ainsi établi.

Notons que les noyaux $k_{n,i}(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i)$ sont des fonctions continues que l'on pourra donc remplacer dans la formule (21) par des polynomes d'approximation.

16. Ce théorème généralise le théorème de Weierstrass [1] sur les fonctions continues considérées comme limites de polynomes.

D'après ce que l'on a vu au Chapitre II (n° 22) la convergence sera uniforme dans tout ensemble compact de fonctions continues. Cela correspond à la convergence uniforme, dans le cas du théorème de Weierstrass, si les fonctions sont envisagées dans des domaines finis.

17. Généralisations du résultat de Riesz sur les fonctionnelles linéaires. — Nous avons vu précédemment qu'il y avait d'autres fonctionnelles linéaires que celles qui sont régulières et nous sommes arrivés à la notion de fonctionnelles linéaires *générales* en les caractérisant par des conditions (a, b du n° 2) que vérifiaient en particulier les fonctionnelles régulières :

Il est aisé de développer des considérations analogues en partant des fonctionnelles régulières homogènes d'un degré quelconque. Pour abréger, nous traiterons en détail le seul cas du second degré et nous donnerons seulement de rapides indications sur le cas général.

18. Toute fonctionnelle régulière et homogène du second degré $F[y(t)]$ vérifie la condition suivante :

$$F[\lambda y_1(t) + \mu y_2(t)] = A\lambda^2 + 2B\lambda\mu + C\mu^2, \tag{22}$$

A, B, C étant des fonctionnelles de $y_1(t)$ et de $y_2(t)$ et la relation étant valable quelles que soient $y_1(t), y_2(t)$ et les constantes λ et μ. La relation (22) entraîne d'ailleurs

$$A = F[y_1(t)],$$
$$C = F[y_2(t)]$$

---

[1] *Cf.* [119].

et l'on a enfin

$$2B = F[y_1(t) + y_2(t)] - F[y_1(t)] - F[y_2(t)].$$

B est d'ailleurs une fonctionnelle *bilinéaire* de y_1 et de y_2, ce qui veut dire qu'elle est linéaire par rapport à chacune d'elles quand l'autre est fixée. Enfin B se réduit visiblement à F quand on prend les deux arguments dont elle dépend égaux à $y(t)$.

Mais il existe d'autres fonctionnelles que les *régulières* qui peuvent se déduire d'une fonctionnelle bilinéaire en égalant les deux arguments : ce seront, par définition, les fonctionnelles homogènes entières (du second degré). Nous allons voir [42] qu'elles admettent une représentation analytique tout à fait analogue à celle que Riesz a donnée pour les fonctionnelles linéaires mais où intervient une intégrale multiple de Stieltjes (intégrale double dans le cas du second degré).

19. Soit donc une fonctionnelle bilinéaire dépendant de deux arguments y et Y

$$\Phi\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}),\ Y(\overset{b}{\underset{a}{t'}})\right].$$

Reprenant la méthode du n° 7 nous désignerons par $y_\tau(t)$ la fonction égale à un pour $a \leq t \leq \tau$ et nulle pour $\tau < t \leq b$ et nous introduirons de même $Y_{\tau'}(t')$. Nous poserons enfin

$$\Phi[y_\tau(t),\ Y_{\tau'}(t')] = f(\tau, \tau').$$

définissant ainsi une fonction ordinaire des deux variables τ et τ'. Il restera enfin à remplacer $y(t)$ et $Y(t')$ par deux fonctions approchées $\eta(t)$, $H(t)$ définies comme au n° 7. Les points de division ne sont pas forcément les mêmes pour les intervalles de variation de t et de t' : nous les désignerons par t_i et t'_k.

Dans ces conditions

$$\Phi[\eta(t),\ H(t')] = \Phi\Big[\sum_i y(\bar{t}_i)\{y_{t_i}(t) - y_{t_{i-1}}(t)\},$$
$$\sum_k Y(\bar{t}'_k)\{y_{t'_k}(t') - y_{t'_{k-1}}(t')\}\Big]$$

qui, d'après la bilinéarité se réduit à

$$(23)\qquad \sum_{ik} y(\bar{t}_i)\,Y(\bar{t}'_k)\,\{f(t_i, t'_k) - f(t_i, t'_{k-1}) - f(t_{i-1}, t'_k) + f(t_{i-1}, t'_{k-1})\},$$

$\Phi[y(t), Y(t)]$ est la limite de cette expression quand les intervalles partiels tendent vers zéro.

La limite d'une somme telle que (23), indépendante des intervalles partiels considérés, est, par définition, *l'intégrale double de Stieltjes* étendue au carré $a \leqq t \leqq b$, $a \leqq t' \leqq b$ du plan t, t'. Si nous remarquons que dans (23) les termes dans les parenthèses constituent une double différence de f obtenue en faisant varier t puis t', il est naturel de noter l'intégrale double de Stieltjes

$$\int_a^b \int_a^b y(t)\,Y(t')\,d_t\,d_{t'}f(t, t').$$

Nous aurons donc

$$\Phi[y(t), Y(t')] = \int_a^b \int_a^b y(t)\,Y(t')\,d_t d_{t'} f(t, t')$$

et, enfin, pour la fonctionnelle *homogène générale* (du second degré)

$$\text{(24)} \qquad F[y(t)] = \int_a^b \int_a^b y(t)\,y(t')\,d_t\,d_{t'} f(t, t'),$$

où l'on peut toujours, comme plus haut, supposer $f(t, t')$ symétrique.

20. L'intégrale double de Stieltjes peut se noter de façon un peu différente en faisant intervenir l'expression

$$H[S] = \int\int_S d_t\,d_{t'} f(t, t'),$$

où l'intégrale double est étendue à une aire S quelconque du carré $a \leqq t \leqq b$, $a \leqq t' \leqq b$. H est en somme une fonctionnelle de l'aire S; c'est une fonctionnelle additive en ce sens que, si l'on réunit deux aires S et S′ sans partie commune

$$H[S + S'] = H[S] + H[S'].$$

L'intégrale de Stieltjes précédente peut s'écrire alors

$$\int\int y(t)\,y(t')\,dH$$

ou, si elle porte sur une fonction quelconque $\varphi(t, t')$

$$\text{(25)} \qquad \int\int \varphi(t, t')\,dH.$$

Intuitivement on peut dire que dH représente la valeur de H pour une aire infinitésimale autour du point tt' du carré. On démontre que (25) a un sens si $\varphi(t, t')$ est continue et si la fonctionnelle H est *à variation bornée* ce qui veut dire que, pour toute décomposition du champ d'intégration en domaines élémentaires, la somme des valeurs correspondantes de H, chacune prise en valeur absolue, reste bornée.

21. L'intégrale double de Stieltjes qui figure dans la formule précédente (24) peut être décomposée en termes de nature diverses, de même que, au n° 9, l'intégrale simple de Stieltjes donnant l'expression d'une fonctionnelle linéaire. Seulement la décomposition est plus compliquée.

Sans insister sur cette décomposition pour laquelle nous renvoyons le lecteur au livre de M. P. Lévy [1] nous indiquerons seulement la forme des termes les plus simples, qui s'expriment par des intégrales ordinaires; ils seront du type

$$\int_a^b \int_a^b \mathrm{K}(\xi_1, \xi_2) y(\xi_1) y(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2, \tag{18}$$

déjà rencontré et

$$\int_{\mathrm{C}} \mathrm{K}(s) y(\xi_1) y(\xi_2)\, ds, \tag{26}$$

intégrale prise sur une courbe continue C intérieure au carré et pour laquelle ξ_1, ξ_2 sont des fonctions continues d'un paramètre s.

Très souvent cette courbe se réduit à la diagonale du carré et (26) prend alors la forme particulière

$$\int_a^b \mathrm{K}(\xi) y^2(\xi)\, d\xi. \tag{26'}$$

M. P. Lévy nomme fonctionnelles *normales* celles où ne figurent que des termes du type (18) ou (26').

22. Des considérations analogues s'appliqueraient aux fonctionnelles *entières* homogènes d'un degré n quelconque. Contentons-nous d'indiquer que de telles fonctionnelles seront dites *normales* si

---

(1) P. Lévy, [75].

les seuls termes qui y figurent sont de forme

$$(27) \qquad \underbrace{\int_a^b \cdots \int_a^b}_{h} K(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_h)\, y^{\alpha_1}(\xi_1)\, y^{\alpha_2}(\xi_2) \ldots y^{\alpha_h}(\xi_h)\, d\xi_1\, d\xi_2 \ldots d\xi_h,$$

où les $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ sont des entiers quelconques dont la somme est égale à n : ce sont les fonctionnelles *régulières* et les fonctionnelles *normales* qui sont les plus importantes pour les applications.

Dans ce qui précède nous avons suivi la marche qui nous conduisait le plus vite aux développements que nous avions en vue. Mais nous devons au moins signaler le point de vue fort intéressant auquel s'est placé M. Fréchet pour définir les fonctionnelles de degré n (¹).

Un polynome $P(x)$ de degré n vérifie identiquement la condition

$$(28) \qquad \begin{aligned} &P(x_1 + x_2 + \ldots + x_{n+1}) \\ &\quad - \Sigma\, P(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_n}) + \ldots + (-1)^n\, \Sigma\, P(x_i) + (-1)^{n+1}\, P(0) = 0, \end{aligned}$$

où les sommes concernent les *combinaisons* des lettres x_1, $x_2, \ldots, x_{n+1}$, et M. Fréchet a démontré qu'inversement toute fonction *continue* qui satisfait (28), quelles que soient les valeurs de x_1, $x_2, \ldots, x_{n+1}$, est un polynome de degré n au plus. Il caractérise de même une fonctionnelle de degré entier n par la continuité et l'équation

$$(29) \qquad \begin{aligned} &U[y_1 + y_2 + \ldots + y_{n+1}] \\ &\quad - \Sigma\, U[y_{i_1} + \ldots + y_{i_n}] + \ldots + (-1)^{n+1}\, U[0] = 0, \end{aligned}$$

qui doit être satisfaite quels que soient les arguments $y_1(t), y_2(t), \ldots$. A partir de (29) il peut enfin étudier les fonctionnelles homogènes (qui doivent de plus satisfaire à $U[\lambda y] = \lambda^p U[y]$ et montrer que toute fonctionnelle de degré n s'exprime comme somme de fonctionnelles homogènes des degrés n, $n-1$, ...

III. — SÉRIES DE FONCTIONNELLES HOMOGÈNES.

23. Il n'y a pas de difficulté à introduire des séries dont les divers termes sont des fonctionnelles homogènes que l'on supposera être *régulières* ou encore *normales*.

(¹) *Cf.* FRÉCHET, [37].

Examinons le premier cas ([1]). La série sera de forme

$$(30)\quad G\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right]=\sum_{0}^{\infty}{}_{n} F_n[y(t)]$$

$$= k_0+\int_a^b k_1(\xi)y(\xi)\,d\xi$$

$$+\int_a^b\int_a^b k_2(\xi_1,\xi_2)y(\xi_1)y(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2+\ldots$$

$$+\int_a^b\ldots\int_a^b k_n(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$$

$$\times y(\xi_1)\ldots y(\xi_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_n+\ldots.$$

Si, par exemple, les modules maximum des divers noyaux sont inférieurs aux nombres positifs K_0, K_1, ..., K_n, ... et si la série

$$(30')\qquad K_0+K_1x+\ldots+K_nx^n+\ldots$$

a pour rayon de convergence R, la série (30) sera absolument et uniformément convergente pour

$$|y(t)|<\frac{R}{b-a}$$

et définira, pour ce champ de valeurs de y, une fonctionnelle continue d'ordre zéro. Cette fonctionnelle n'est pas d'un degré fini. Elle peut être considérée comme obtenue, par le passage du discontinu au continu, à partir d'une série de puissances de plusieurs variables, c'est-à-dire à partir d'une fonction analytique de plusieurs variables.

24. Les fonctionnelles données par la série (30), que l'on peut appeler *série fonctionnelle de puissances*, avaient été nommées, par divers auteurs, *fonctionnelles analytiques*. Nous préférons abandonner cette dénomination pour éviter toute confusion avec les *fonctionnelles analytiques* qu'a étudiées récemment M. Fantappié ([2]).

Si, dans le champ de convergence de la série (30), l'argument $y(t)$ est fonction analytique d'un paramètre α que nous écrirons $y(t, \alpha)$, alors

$$G[y(t,\alpha)]=f(\alpha)$$

([1]) Volterra, [108]; Fréchet, [37].

([2]) *Cf.* Fantappié, [27].

étant la somme d'une série uniformément convergente de fonctions analytiques de α est, elle-même, analytique en α. *Des fonctionnelles telles que* (30) *conservent donc l'analyticité par rapport à un paramètre qui figure dans leur argument.* C'est cette propriété fondamentale, qui appartient non seulement aux fonctionnelles précédentes, mais aussi à d'autres types de fonctionnelles, que M. Fantappiè a adoptée comme caractérisant les *fonctionnelles analytiques.*

On étudiera de façon tout à fait analogue les séries de fonctionnelles *normales*. Nous aurons d'ailleurs l'occasion d'y revenir à propos des équations intégrales non linéaires (Chap. XI, § III).

CHAPITRE IV.

OPÉRATIONS SUR LES FONCTIONNELLES.

I. — DÉRIVÉE ET DIFFÉRENTIELLE D'UNE FONCTIONNELLE.

1. Après les définitions et les exemples précédents, la question se pose d'établir un calcul fonctionnel général, analogue au calcul concernant les opérations sur les fonctions ordinaires. Cela sera possible par l'introduction d'opérations convenables s'appliquant aux fonctionnelles.

Si nous reprenons une fonction de n variables $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, les deux notions fondamentales sont celles de *dérivée partielle* et celle de *différentielle totale*. Cette dernière peut être définie, à partir des dérivées partielles, par l'expression

$$df = \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\partial f}{\partial y_i} dy_i, \tag{1}$$

mais elle peut aussi être caractérisée, directement, par les propriétés suivantes :

1° C'est une fonction linéaire des variables dy_i.

2° Si l'on pose $dy_i = \varepsilon \theta_i$ et que l'on prenne ε comme infiniment petit principal, la différence entre df et Δf (cette dernière notation désignant l'accroissement de f correspondant aux accroissements $\varepsilon\theta_i$ des variables) est un infiniment petit d'ordre supérieur à l'unité.

Passons maintenant au cas d'une fonctionnelle $F\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right]$ et donnons à $y(t)$ un accroissement $\delta y(t)$; nous sommes conduits à définir *la différentielle de* F, soit δF, comme une fonctionnelle dépen-

dant de $\delta y(t)$ $\Big($et aussi de $y(t)$, de sorte qu'on pourra la noter $\delta F\Big[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}), \delta y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\Big]\Big)$ telle que :

a. Elle soit fonctionnelle linéaire de δy;

b. En prenant $\delta y = \varepsilon\theta(t)$, *où* ε *est toujours l'infiniment petit principal, elle ne diffère que par un infiniment petit d'ordre supérieur à un de l'accroissement* ΔF *qui correspond à l'accroissement* δy *de la fonction argument, ce qui revient à dire que l'on a*

$$\lim_{\varepsilon=0} \frac{\Delta F - \delta F[y(t), \varepsilon\theta(t)]}{\varepsilon} = 0$$

ou encore, en tenant compte de a.

$$(2) \qquad \lim_{\varepsilon=0} \left\{ \frac{\Delta F}{\varepsilon} - \delta F[y(t), \theta(t)] \right\} = 0 \quad (^1),$$

ΔF *ayant la valeur* $F[y + \varepsilon\theta] - F[y]$.

L'extension aux fonctionnelles de la notion de *dérivée partielle* est *non moins importante* et a été obtenue par M. Volterra dès ses premiers travaux sur le sujet ([2]). Il montrait en même temps comment, pour une fonctionnelle ainsi *dérivable*, on pouvait calculer effectivement, en généralisant la formule (1), une différentielle jouissant des propriétés qui viennent d'être dites. Ce sont ces résultats que nous exposerons d'abord.

2. Extension de la notion de dérivée partielle : dérivée fonctionnelle. — La définition de la dérivée partielle implique un accroissement donné à une seule des variables y_i. Pour passer au cas d'une dérivée fonctionnelle il serait peu indiqué d'envisager un accroissement donné à $y(t)$ en un seul point de l'intervalle (a, b) : ce serait sortir de propos délibéré du champ simple et important des fonctions

---

([1]) M. Hadamard [60], puis M. Fréchet ont insisté sur l'intérêt d'une définition directe de la différentielle. M. Fréchet a fait sur cette question, tant en ce qui concerne les fonctions ordinaires que les fonctionnelles, des travaux très importants : [38], [40]. Sa définition de la différentielle fait intervenir la distance de l'espace fonctionnel; elle est un peu plus restrictive que celle du texte. Nous la retrouverons ultérieurement : nous avons préféré garder au début le point de vue qui a été celui de M. Volterra dès ses premiers travaux ([108] et [109]).

Au sujet des diverses définitions de la différentielle, *cf.* P. Lévy, [75], p. 51.

([2]) [108], [109].

continues; de plus ce serait inopérant pour les fonctionnelles, les plus usuelles, dont la valeur ne change pas quand on modifie l'argument aux points d'un ensemble de mesure nulle. Il conviendra donc de donner un accroissement à l'argument $y(t)$ en tous les points d'un segment contenant un point ξ de l'intervalle (a, b). En faisant tendre vers zéro l'accroissement et le segment considéré on obtient, et c'est là la généralisation cherchée de la dérivée partielle, *la notion de dérivée fonctionnelle au point* ξ.

En voici la définition précise.

Soit ΔF l'accroissement d'une fonctionnelle

$$F\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right]$$

lorsqu'on donne à $y(t)$ un accroissement arbitraire (intégrable)

$$\delta y(t) = \omega(t)$$

d'un signe constant et concernant uniquement l'intervalle de valeurs de t $(m \leqq t \leqq n)$, intervalle d'amplitude $n - m = h$ et contenant à son intérieur le point ξ fixé sur le segment (a, b). Posons

$$\sigma = \int_m^n \omega(t)\,dt.$$

Admettons qu'il y ait une limite bien déterminée et finie de $\frac{\Delta F}{\sigma}$ *lorsque* μ [maximum de $|\omega(t)|$] *et* h [étendue du segment (m, n)] *tendent simultanément vers zéro, le segment* (m, n) *contenant toujours* ξ *à son intérieur. La limite en question sera, par définition, la dérivée fonctionnelle de* F *par rapport à l'argument* $y(t)$ *au point* ξ.

D'après sa définition cette dérivée ne dépend pas de $\omega(t)$, mais on doit préciser dans chaque cas quel est le champ des fonctions $\omega(t)$ [1]. La dérivée dépend du paramètre ξ qui joue le rôle de paramètre de dérivation : c'est une fonction ordinaire de ξ. Enfin notons qu'elle sera aussi une fonctionnelle de $y(t)$ définie dans un

---

[1] Il pourra arriver que l'on ait à remplacer, dans la définition de la dérivée fonctionnelle, μ, maximum du module de $\omega(t)$, par une autre quantité dépendant de la définition de la distance dans le champ des fonctions $\omega(t)$.

certain champ (à préciser lui aussi) : nous la noterons donc

$$F'\left[y\overset{b}{\underset{a}{(t)}}, \xi\right].$$

3. Passage de la dérivée fonctionnelle à la différentielle. — La formule précédente (1) conduit à rechercher si la différentielle δF ne s'exprime pas, à partir de la dérivée fonctionnelle F′, dont on supposera l'existence, par la formule

$$(3) \qquad \delta F = \int_a^b F'\left[y\overset{b}{\underset{a}{(t)}}, \xi\right] \delta y(\xi)\, d\xi.$$

Nous allons envisager d'abord le cas où le champ des arguments $y(t)$ (donc aussi celui de leurs variations) est l'ensemble des fonctions bornées et continues ([1]). Suivant toujours l'analyse de M. Volterra, nous établirons (3) sous les conditions suivantes, qui ne sont évidemment pas les plus larges possibles :

Dans le champ fonctionnel considéré :

I. *Le rapport* $\frac{\Delta F}{\mu h}$ *est borné en module par le nombre* M;

II. *La limite de* $\frac{\Delta F}{\sigma}$ *est atteinte de façon uniforme par rapport à* ξ $(a \leq \xi \leq b)$ *aussi bien que par rapport à* $y(t)$;

III. $F'[y(t), \xi]$ *est uniformément continue par rapport à* ξ *et à* $y(t)$.

L'expression (3) étant évidemment fonctionnelle linéaire de $\delta y(t)$, il suffit de vérifier la formule (2).

4. Cas où la variation de l'argument a un signe constant. — Introduisant, pour vérifier (2), la variable positive et très petite ε, nous donnons à $y(t)$ la variation $\delta y(t)$ d'un signe constant, positif par exemple, inférieure à ε et que l'on peut toujours écrire $\delta y(t) = \varepsilon\,\theta(t)$, la fonction $\theta(t)$ ayant pour borne supérieure *un*. Évaluons

$$\Delta F = F[y + \varepsilon\theta] - F[y].$$

Nous passerons d'abord de $y(t)$ à la fonction représentée par

([1]) Des considérations analogues s'appliqueraient, *mutatis mutandis*, à d'autres champs fonctionnels; *cf.* d'ailleurs *infra* n° 9.

la courbe sinueuse de la figure, fonction continue qui coïncide avec $y(t)+\varepsilon\theta(t)$, dans les intervalles $t_1t'_1$, $t_2t'_2$, ..., avec $y(t)$ aux points a, τ_1, τ_2, ..., et qui délimite, avec la courbe $y(t)$, des aires σ_1, σ_2, ...

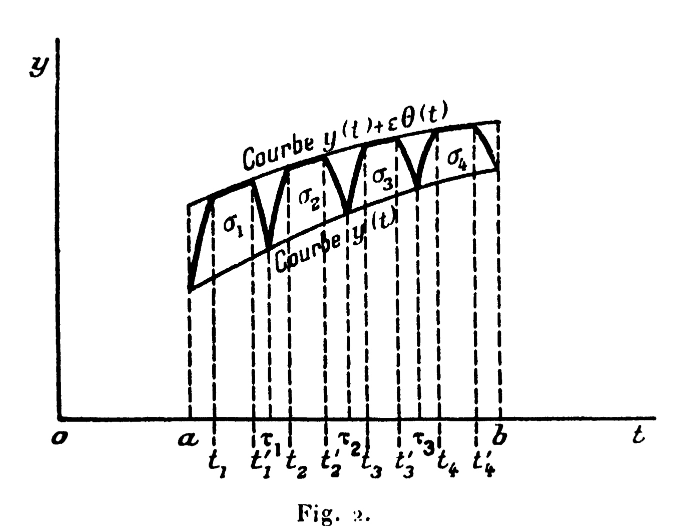


Fig. 2.

Effectuant d'abord la variation σ_1, $y(t)$ devient $y_1(t)$ et F devient F_1 avec

$$F_1 - F = \sigma_1\Big(F'[y(t), \xi_1] + \eta_1\Big).$$

effectuant ensuite la variation σ_2, il vient de même

$$F_2 - F_1 = \sigma_2\Big(F'[y_1(t), \xi_2] + \eta_2\Big)$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$F_p - F_{p-1} = \sigma_p\Big(F'[y_{p-1}(t), \xi_p] + \eta_p\Big).$$

s'il y a p intervalles $a\tau_1$, $\tau_1\tau_2$, ..., $\tau_{p-1}b$ (p est égal à quatre dans le cas de la figure). Les ξ peuvent être pris quelconques, respectivement intérieurs aux intervalles susdits; leur choix sera d'ailleurs précisé à l'instant. Enfin, d'après II, η_i est très petit avec ε et avec h_i (longueur de l'intervalle $\tau_{i-1}\tau_i$ sur lequel se répartit la variation σ_i). Les formules précédentes donnent

$$F_p - F = \sigma_1\Big(F'[y(t), \xi_1] + \eta_1\Big) + \sigma_2\Big(F'[y_1(t), \xi_2] + \eta_2\Big) + \ldots.$$

Mais, F' étant uniformément continue on peut remplacer

$$F'[y_i(t), \xi_{i+1}] \quad \text{par} \quad F'[y(t), \xi_{i+1}]$$

en introduisant un terme correctif ζ_i très petit avec ε. Notons enfin que, pour un choix convenable des ξ_i on aura, d'après le théorème de la moyenne

$$\sigma_i F'[y(t), \xi_i] = \int_{\tau_{i-1}}^{\tau_i} F'[y(t), \xi]\, d\sigma(\xi).$$

Dans ces conditions, en notant $\varepsilon\bar{\theta}$ l'accroissement de y qui correspond à la courbe sinueuse de la figure $\left[\varepsilon\bar{\theta}(\xi)\, d\xi = d\sigma(\xi)\right]$, on aura

$$F_p - F = \varepsilon \int_a^b F'[y(t), \xi]\,\bar{\theta}(\xi)\, d\xi + (\sigma_1\eta_1 + \sigma_2\eta_2 + \ldots) + (\sigma_2\zeta_2 + \sigma_3\zeta_3 + \ldots).$$

Passons enfin à $F[y + \varepsilon\theta]$, que nous désignons en abrégé par $\bar{F}$. $\bar{F} - F_p$ correspond à des variations moindres que ε et concernant des intervalles $a\, t_1$, $t'_1\, t_2$, ...; d'après I, il est donc limité en module par

$$\varepsilon M\Big((t_1 - a) + (t_2 - t'_1) + \ldots\Big),$$

tandis que

$$\varepsilon \left| \int_a^b F'[y(t), \xi]\Big(\bar{\theta}(\xi) - \theta(\xi)\Big)\, d\xi \right| < K\varepsilon\Big((t_1 - a) + (t_2 - t'_1) + \ldots\Big),$$

K désignant une borne supérieure de $|F'|$. On en déduit que

$$(4) \qquad \left| \frac{\Delta F}{\varepsilon} - \int_a^b F'[y(t), \xi]\,\theta(\xi)\, d\xi \right| \leqq \frac{|\sigma_1\eta_1 + \sigma_2\eta_2 + \ldots|}{\varepsilon} + \frac{|\sigma_2\zeta_2 + \ldots|}{\varepsilon} + (M + K)\Big((t_1 - a) + (t_2 - t'_1) + \ldots\Big)$$

et il reste à vérifier que le second membre de (4) est arbitrairement petit avec ε. Or en désignant par η et ζ les plus grandes des quantités $|\eta_i|$ et $|\zeta_i|$ et en observant que $\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots < (b - a)\varepsilon$, on voit que le second membre est inférieur à

$$(b - a)(\eta + \zeta) + (M + K)\Big((t_1 - a) + (t_2 - t'_1) + \ldots\Big).$$

Le résultat annoncé s'en déduit puisque, d'après II, η est arbitrairement petit si l'on prend ε assez petit et les points de division $\tau_1, \tau_2 \ldots$ assez serrés, d'après III, ζ est arbitrairement petit avec ε et enfin que la dernière somme $(t_1 - a) + (t_2 - t'_1) + \ldots$ peut être rendue arbitrairement petite par un choix convenable des points $t_1, t'_1, t_2, t'_2, \ldots$.

5. Cas où la variation de l'argument change de signe. — Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que $|\theta(t)|$ soit constamment inférieur à l'unité. On posera

$$\theta(t) = \theta_1(t) - \theta_2(t) \tag{5}$$

avec

$$\theta_1(t) = \frac{1 + \theta(t)}{2}, \qquad \theta_2(t) = \frac{1 - \theta(t)}{2},$$

les fonctions $\theta_1(t)$ et $\theta_2(t)$ étant partout positives et bornées par l'unité de sorte que le calcul du numéro précédent s'appliquera à chacune d'elles.

On a alors

$$\frac{\Delta F}{\varepsilon} = \frac{F[y + \varepsilon\theta] - F[y]}{\varepsilon}$$
$$= \frac{F[y + \varepsilon\theta_1] - F[y]}{\varepsilon} - \frac{F[y + \varepsilon\theta_1] - F[y + \varepsilon\theta_1 - \varepsilon\theta_2]}{\varepsilon}.$$

Lorsque ε tend vers zéro la première fraction tend vers

$$\int_a^b F'[y, \xi]\,\theta_1(\xi)\,d\xi,$$

d'après le n° 4, la seconde tend vers

$$\int_a^b F'[y, \xi]\,\theta_2(\xi)\,d\xi,$$

parce que, d'une part on peut trouver, pour

$$\frac{F[y + \varepsilon\theta_1] - F[y + \varepsilon\theta_1 - \varepsilon\theta_2]}{\varepsilon} - \int_a^b F'[y + \varepsilon\theta_1 - \varepsilon\theta_2, \xi]\,\theta_2(\xi)\,d\xi,$$

une limite supérieure arbitrairement petite avec ε et qui ne dépend pas de la fonction-argument $y + \varepsilon\theta_1 - \varepsilon\theta_2$ (n° 4) et que, d'autre part, on a évidemment

$$\lim_{\varepsilon = 0} \int_a^b F'[y + \varepsilon\theta_1 - \varepsilon\theta_2, \xi]\,\theta_2(\xi)\,d\xi = \int_a^b F'[y, \xi]\,\theta_2(\xi)\,d\xi.$$

Il en résulte bien que, dans tous les cas.

$$\lim_{\varepsilon = 0} \frac{\Delta F}{\varepsilon} = \int_a^b F'[y, \xi]\,\theta(\xi)\,d\xi.$$

6. Formes plus générales de la différentielle. — Dans le cas d'une fonctionnelle linéaire la différentielle coïncide avec la fonctionnelle elle-même de sorte qu'il est bien clair que les fonctionnelles précédentes, pour lesquelles la différentielle a la forme (3)

$$\delta F = \int_a^b F'[y, \xi]\, \delta y(\xi)\, d\xi,$$

ne sont pas les fonctionnelles les plus générales ayant une différentielle. Il existera des différentielles du type linéaire le plus général et se mettant donc sous la forme de Riesz [Chap. III, n° 9, formule (16)].

M. Volterra a envisagé, en même temps que le type précédent (3) le cas — pratiquement suffisant — où il ne figure pas d'intégrale de Stieltjes dans la différentielle laquelle se réduit alors à

$$(6) \qquad \delta F = \int_a^b F'[y, \xi]\, \delta y(\xi)\, d\xi + \sum_i a_i\, \delta y(\xi_i),$$

δF comprend dans ce cas une partie *régulière* analogue au second membre de (3), mais elle dépend aussi de δy aux points *exceptionnels* ξ_i. On en trouvera de nombreux exemples dans la suite.

Lorsque δF est du type (6) les conditions précédentes I, II ne sont plus vérifiées au voisinage d'un point exceptionnel ξ_i. Il est aisé de voir comment on peut les modifier.

Observons d'abord que I ne peut subsister pour un intervalle contenant le point exceptionnel ξ_1. Admettons pourtant que les conditions I, II, III subsistent pour tous les intervalles ne contenant pas ξ_1 à leur intérieur et supposons de plus que, pour un intervalle d'amplitude h contenant ξ_1, on ait

$$(7) \qquad \lim_{\substack{h=0\\ \mu=0}} \frac{\Delta F}{\mu} = 0,$$

la limite étant obtenue de façon uniforme par rapport aux fonctions-arguments. Le raisonnement du n° 4 s'applique en prenant ξ_1 pour l'un des points $\tau_1, \tau_2, \ldots$ et avec des modifications insignifiantes : *la différentielle garde la forme régulière* (3).

Supposons alors que la condition (7) soit remplacée par la suivante :

il existe une constante a telle que

$$(7') \qquad \lim_{\substack{h=0\\ \mu=0}} \left\{ \frac{\Delta F}{\mu} - a \frac{\delta y(\xi_1)}{\mu} \right\} = 0$$

uniformément comme plus haut. La fonctionnelle $F - ay(\xi_1)$ vérifiera (7) et aura une différentielle régulière. D'où

$$\delta F = \int_a^b F'[y, \xi] \, \delta y(\xi) \, d\xi + a \, \delta y(\xi_1).$$

En général des conditions telles que (7′) pour les intervalles qui contiennent les points exceptionnels ξ_i, jointes aux précédentes I, II, III pour les intervalles auxquels les ξ_i ne sont pas intérieurs, *permettront d'affirmer l'existence d'une différentielle* δF *du type* (6).

7. Remarques sur les deux points de vue possibles dans l'étude des dérivées et différentielles. — On peut aborder l'étude infinitésimale d'une fonctionnelle soit en cherchant sa dérivée fonctionnelle en chaque point de (a, b), soit en cherchant en bloc sa différentielle. Il ne faut pas opposer les deux points de vue et nous ne voyons pas de raisons d'affirmer la supériorité de l'un d'eux : la différentielle synthétise ce qui se passe aux divers points de l'intervalle (a, b) et, s'il s'agit d'une fonctionnelle assez simple, on l'atteindra immédiatement [1]; dans des cas plus complexes l'autre point de vue pourra s'*imposer* parce qu'il permet de diviser la difficulté. Lorsqu'il en est ainsi, les précédentes I, II, III donnent des *conditions locales* (qui ne sont évidemment pas les plus larges possible) permettant de conclure à l'existence d'une différentielle pour une variation de y intéressant tout le segment (a, b).

Du point de vue de l'étude *directe* de l'existence de la différentielle, il serait d'ailleurs intéressant de dégager des *conditions suffisantes* assez larges. Il ne semble pas que l'on s'en soit beaucoup préoccupé, aussi donnerons-nous un exemple très simple de telles conditions.

Admettons, ce qui ne restreint pas la généralité, qu'il s'agisse d'étudier la fonctionnelle $F[y]$ pour les fonctions voisines de $y(t) \equiv 0$.

---

(1) C'est ce qui arrive pour les fonctionnelles qui interviennent dans le calcul des variations : on en calcule directement la différentielle (ou variation).

En désignant par $x(t)$ l'accroissement δy, l'accroissement de la fonctionnelle ΔF sera une fonctionnelle

$$G[x(t)]$$

que nous supposons, comme plus haut, définie dans le champ des fonctions $x(t)$ continues et bornées en module par le nombre M.

Introduisons deux hypothèses de quasi-linéarité :

HYPOTHÈSE A. — *Si* $|x| \leqq \varepsilon$, $|k| \leqq 1$, *on a*

$$G[kx] = k(G[x] + \Phi),$$

$\frac{\Phi}{\varepsilon}$ *tendant vers zéro avec* ε *uniformément par rapport à* $x(t)$ *et à* k.

HYPOTHÈSE B. — *Si* $|x| \leqq \varepsilon$ *et* $|y| \leqq \varepsilon$, *on a*

$$G[x+y] = G[x] + G[y] + \Psi,$$

$\frac{\Psi}{\varepsilon}$ *tendant vers zéro avec* ε.

Nous en déduirons l'existence d'une différentielle de la fonctionnelle considérée pour la valeur zéro de l'argument. D'abord :

I. *Quel que soit* $x(t)$,

$$\frac{G[\varepsilon x(t)]}{\varepsilon}$$

a une limite $H[x]$ *quand* ε *tend vers zéro.*

Nous pouvons en effet admettre que $|x| \leqq 1$ en remplaçant au besoin ε par $\frac{\varepsilon}{M}$. Or, pour démontrer l'énoncé, il suffit de vérifier que

$$\frac{G[\varepsilon x]}{\varepsilon} - \frac{G[\varepsilon' x]}{\varepsilon'}$$

peut être rendu inférieur en module à α arbitrairement petit pourvu que ε et ε' soient inférieurs à ε_1 convenablement choisi. Mais

$$\frac{G[\varepsilon x]}{\varepsilon} = \frac{G\left[\frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}\varepsilon_1 x\right]}{\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon_1}G[\varepsilon_1 x] + \frac{\Phi}{\varepsilon_1}$$

(d'après A), Φ correspondant à la fonction $\varepsilon_1 x$ inférieure en module

à ε_1 et à $k = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}$; de même

$$\frac{G[\varepsilon' x]}{\varepsilon'} = \frac{1}{\varepsilon_1} G[\varepsilon_1 x] + \frac{\Phi'}{\varepsilon_1},$$

Φ' correspondant à la même fonction $\varepsilon_1 x$ et à $k' = \frac{\varepsilon'}{\varepsilon_1}$.

D'où

$$\left| \frac{G[\varepsilon x]}{\varepsilon} - \frac{G[\varepsilon' x]}{\varepsilon'} \right| \leq \frac{|\Phi|}{\varepsilon_1} + \frac{|\Phi'|}{\varepsilon_1}$$

qui tend bien vers zéro avec ε_1 d'après A.

Écartons le cas banal où $H[x]$ serait identiquement nul et vérifions que :

II. $H[x]$ *est une fonctionnelle linéaire, c'est donc la différentielle cherchée.*

D'abord

$$\frac{G[\varepsilon k x]}{\varepsilon} - \frac{k\, G[\varepsilon x]}{\varepsilon} = \frac{k\Phi}{\varepsilon}$$

donne à la limite, pour $\varepsilon = 0$,

$$H[kx] - kH[x] = 0.$$

D'autre part

$$\frac{G[\varepsilon(x+y)]}{\varepsilon} = \frac{G[\varepsilon x]}{\varepsilon} + \frac{G[\varepsilon y]}{\varepsilon} + \frac{\Psi}{\varepsilon}$$

et, d'après B, il en résulte

$$H[x+y] = H[x] + H[y].$$

La différentielle ainsi obtenue $\delta F = H[x]$ [avec $x(t) = \delta y(t)$] n'est pas forcément bornée. Ajoutons aux précédentes conditions la suivante :

Hypothèse C. — $H[x]$ *est bornée pour* $|x|$ *borné, donc c'est une fonctionnelle continue de* x (¹).

$H[x]$ admettra alors une expression analytique du type de Riesz

$$H[x] = \int_a^b x(\xi)\, df(\xi).$$

(¹) Chap. III, n° 4.

Dans un intervalle où $f(\xi)$ est dérivable et a une dérivée continue $f'(\xi)$, la fonctionnelle considérée sera elle-même dérivable au sens du n° **2**, sa dérivée fonctionnelle étant $f'(\xi)$ au point ξ.

8. Cas où la fonction-argument a des dérivées finies et continues. — Jusqu'à présent nous nous sommes placés dans le cas où les arguments $y(t)$ et $\delta y(t)$ sont des fonctions bornées et continues. Le cas où $F[y(t)]$ n'est défini que pour des fonctions $y(t)$ bornées et continues *ainsi que leurs p premières dérivées* mérite quelques développements.

Soit la fonctionnelle particulière

$$F = \int_a^b y'^2(t)\,dt,$$

pour laquelle p est égal à 1. Donnant à y un accroissement $\varepsilon\,\theta(t)$, il vient

$$(8)\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Delta F}{\varepsilon} = 2\int_a^b y'(t)\,\theta'(t)\,dt.$$

On a ainsi une expression qu'il est naturel d'appeler différentielle de la fonctionnelle considérée. Dans le cas où $y''(t)$ existe on a

$$2\int_a^b y'(t)\,\theta'(t)\,dt = 2y'(b)\,\theta(b) - 2y'(a)\,\theta(a) - 2\int_a^b y''(t)\,\theta(t)\,dt,$$

expression de la différentielle ayant la forme précédente (6), avec les valeurs exceptionnelles a et b. D'autre part, pour obtenir la dérivée fonctionnelle de F comme limite du rapport $\frac{\Delta F}{\sigma}$, il faudra ajouter à l'existence de y' et $\delta y'$ d'autres conditions (existence par exemple de y'' et $\delta y''$) qui viennent restreindre le champ dans lequel F était définie.

C'est là un point qui paraît assez général : dans les cas où $F[y(t)]$ n'est défini que sous des restrictions de dérivabilité pour y, on sera amené à de nouvelles restrictions concernant y et δy dans l'étude de la différentielle ou de la dérivée fonctionnelle de F.

Admettons en effet que F est défini pour les fonctions $y(t)$ ayant leurs dérivées bornées et continues jusqu'à l'ordre p. Nous pourrons définir l'argument $y(t)$ par la donnée de $y^{(p)}(t)$ et des valeurs C_α,

$C'_\alpha, \ldots, C_\alpha^{(p-1)}$ de $y, y' \ldots, y^{p-1}$ en un point α choisi une fois pour toute arbitrairement sur le segment (a, b). La fonctionnelle F peut alors s'écrire

$$F\left[y^{(p)}\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right), C_\alpha, C'_\alpha, \ldots, C_\alpha^{p-1}\right],$$

fonctionnelle de $y^{(p)}(t)$, fonction ordinaire de $C_\alpha, C'_\alpha, \ldots, C_\alpha^{p-1}$. Le changement d'argument $[y^{(p)}(t)$ au lieu de $y(t)]$ ramène au cas déjà traité et il pourra exister une différentielle de F de forme

$$(9) \quad F_1\,\delta C_\alpha + F_2\,\delta C'_\alpha + \ldots + \int_a^b \Phi[y^{(p)}, C_\alpha, C'_\alpha, \ldots; \xi]\,\delta y^{(p)}(\xi)\,d\xi \quad (^1),$$

en se bornant pour simplifier au cas régulier. Mais si l'on veut dans (9) faire apparaître,commedansla précédente (6), une intégrale définie où figure $\delta y(\xi)$ au lieu de $\delta y^{(p)}(\xi)$, il faudra des intégrations par parties et l'existence des dérivées de Φ par rapport à ξ. Ces dérivées n'ont aucune chance d'exister en général, à moins que l'on ne restreigne encore le champ de variation de l'argument $y(t)$. *A fortiori* pour définir la dérivée fonctionnelle comme limite de $\frac{\Delta F}{\sigma}$ en gardant

$$\sigma = \int_m^n \delta y(t)\,dt,$$

des exemples aisés montrent qu'il faudra, non seulement les restrictions précédentes du champ des arguments y, mais des restrictions analogues pour δy.

9. On sera donc amené en général à restreindre le champ de variation de l'argument $y(t)$ se bornant aux fonctions telles que

$$y(t), \quad y'(t), \quad \ldots \quad y^{(n)}(t) \qquad (n > p)$$

sont bornées et continues et imposant les mêmes conditions à la variation $\delta y(t)$.

Le champ de l'argument étant ainsi réduit, il n'y a aucune difficulté à retrouver (²) des résultats analogues à ceux qui furent établis aux

(¹) Bien entendu, c'est seulement en apparence que les valeurs de y et de ses dérivées pour $t = \alpha$ jouent un rôle spécial. *Cf.* Chap. III, fin du n° 9.

(²) *Cf.* Volterra, [108] et [110].

n°s 3, 6 précédents pour une fonctionnelle définie pour des arguments seulement continus.

Admettons remplies les conditions I, II, III du n° 3, μ désignant maintenant le maximum des quantités

$$|\omega(t)|, \quad |\omega'(t)|, \quad \ldots, \quad |\omega^{(n)}(t)|.$$

Nous pourrons encore en conclure l'existence d'une différentielle donnée par

$$(3) \qquad \delta F = \int_a^b F'\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}), \xi\right] \delta y(\xi)\, d\xi.$$

Le raisonnement fait plus haut se conserve sans modification : il faudra seulement choisir la fonction $\bar{\theta}(t)$, qui définit les aires σ_i de la figure, de façon qu'elle ait des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre n inclus, $\varepsilon\,\bar{\theta}(t)$ étant alors dans un voisinage d'ordre n de la courbe initiale $y(t)$. Mais cette restriction au choix de $\bar{\theta}(t)$ ne gêne nullement pour le choix des points de division τ_i, t'_i et t_i.

Si les conditions I, II, III sont satisfaites pour tout intervalle ne contenant pas le point exceptionnel ξ_1, et si, pour un intervalle contenant ce point, on a la condition (7), l'expression (3) de la différentielle reste valable. Si, enfin, il existe des constantes a_i telles que

$$(7'') \qquad \lim_{\substack{h=0\\ \mu=0}} \left\{ \frac{\Delta F - a_0\,\delta y(\xi_1) - a_1\,\delta y'(\xi_1) - \ldots - a_n\,\delta y^{(n)}(\xi_1)}{\mu} \right\} = 0,$$

limite uniforme par rapport à la fonction argument y, on aura

$$\delta F = \int_a^b F'[y(t), \xi]\,\delta y(\xi)\, d\xi + \sum_0^n{}_i\, a_i\,\delta y^{(i)}(\xi_1)$$

avec une partie régulière et un point exceptionnel ξ_1. On pourra de même envisager plusieurs points exceptionnels.

II. — DÉRIVÉES ET DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE SUPÉRIEUR. EXTENSION DE LA FORMULE DE TAYLOR.

10. Dérivées successives. — La dérivée fonctionnelle première $F[y(t), \xi_1]$ est une nouvelle fonctionnelle de $y(t)$ qui peut être également dérivable. Dans ce cas sa dérivée fonctionnelle prise au point ξ_2

de l'intervalle (a, b) sera la dérivée seconde de F, que nous noterons

$$F''\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}), \xi_1, \xi_2\right].$$

De même, après n dérivations fonctionnelles, on aura la dérivée fonctionnelle $n^{\text{ième}}$ que nous noterons

$$F^{(n)}\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}), \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right],$$

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ désignant les points de l'intervalle (a, b) où ont été effectuées les dérivations successives.

11. Sous des conditions assez larges, on démontre (Cf. *infra* nos **13** et **26**) que F″ est fonction symétrique des paramètres ξ_1, ξ_2

$$F''[y(t), \xi_1, \xi_2] = F''[y(t), \xi_2, \xi_1],$$

ce qui généralise le théorème d'analyse sur l'inversion de deux dérivations partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \, \partial x_s} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_s \, \partial x_i},$$

si f dépend des variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

De même $F^{(n)}$ sera en général fonction symétrique des paramètres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$. On peut encore énoncer ces résultats en disant que l'ordre dans lequel on effectue des dérivations successives fonctionnelles est sans importance.

12. Différentielles successives dans le cas où elles sont régulières. — La définition précédente de la différentielle revient à

$$\delta F[y, \delta y] = \left\{ \frac{d}{d\varepsilon} F[y + \varepsilon\,\delta y] \right\}_{\varepsilon=0},$$

et il sera naturel de définir de même les différentielles successives par

$$\delta^2 F[y, \delta y] = \left\{ \frac{d^2}{d\varepsilon^2} F[y + \varepsilon\,\delta y] \right\}_{\varepsilon=0},$$

. . . .

$$\delta^p F[y, \delta y] = \left\{ \frac{d^p}{d\varepsilon^p} F[y + \varepsilon\,\delta y] \right\}_{\varepsilon=0},$$

. . . .

les dérivées aux seconds membres étant supposées exister et donner des fonctionnelles entières et homogènes en δy de degrés respectifs $2, \ldots, p, \ldots$.

L'expression (3) de δF se généralise aux différentielles suivantes. Supposons, pour nous borner à des hypothèses simples, que les conditions I, II, III du n° 3 restent satisfaites dans les dérivations successives de F. Dans ces conditions (3) appliquée à F' donne

$$\frac{d}{d\varepsilon} F'[y+\varepsilon\,\delta y, \xi_1] = \int_a^b F''[y+\varepsilon\,\delta y, \xi_1, \xi_2]\,\delta y(\xi_2)\,d\xi_2$$

et, puisque

$$\left\{\frac{d^2}{d\varepsilon^2} F[y+\varepsilon\,\delta y]\right\}_{\varepsilon=0} = \left(\frac{d}{d\varepsilon}\int_a^b F'[y+\varepsilon\,\delta y, \xi_1]\,\delta y(\xi_1)\,d\xi_1\right)_{\varepsilon=0},$$

il vient

$$\delta^2 F = \int_a^b \int_a^b F''[y(t); \xi_1, \xi_2]\,\delta y(\xi_1)\,\delta y(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2.$$

On montrera de même que

$$(10)\qquad \delta^p F = \int_a^b \cdots \int_a^b F^{(p)}[y(t); \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p]\,\delta y(\xi_1)\ldots\delta y(\xi_p)\,d\xi_1\ldots d\xi_p.$$

Sous les conditions posées les différentielles successives sont donc des fonctionnelles *régulières et homogènes* ayant pour *noyaux* les dérivées fonctionnelles successives.

13. Extension du théorème de Taylor [1]. — Si, dans la fonctionnelle $F[y+\varepsilon\varphi]$ nous considérons $y(t)$ et $\varphi(t)$ comme fixées, la fonctionnelle devient une fonction ordinaire de ε, soit $f(\varepsilon)$, qui sous les conditions posées au numéro précédent, sera dérivable jusqu'à l'ordre p par rapport à ε, les dérivées étant données par les formules (10) où y est remplacé par $y+\varepsilon\varphi$ et δy par φ. Appliquant à $f(\varepsilon)$ le théorème de Taylor, il vient

$$f(1) = f(0) + \left(\frac{df}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} + \ldots + \frac{1}{(p-1)!}\left(\frac{d^{p-1}f}{d\varepsilon^{p-1}}\right)_{\varepsilon=0} + \frac{1}{p!}\left(\frac{d^p f}{d\varepsilon^p}\right)_{\varepsilon=\theta},$$

où θ est compris entre zéro et un. D'après les formules précédentes il

(1) *Cf.* VOLTERRA, [108].

vient donc

$$(11)\quad \mathrm{F}[y+\varphi] = \mathrm{F}[y] + \sum_{1}^{p-1}{}_i \frac{1}{i!}\int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{F}^{(i)}[y(t);\ \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_i] \times \varphi(\xi_1)\ldots\varphi(\xi_i)\,d\xi_1\ldots d\xi_i + \frac{1}{p!}\int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{F}^{(p)}[y(t)+\theta\,\varphi(t);\ \xi_1, \xi_2, \ldots \xi_p] \times \varphi(\xi_1)\ldots\varphi(\xi_p)\,d\xi_1\ldots d\xi_p,$$

formule qui étend aux fonctionnelles dérivables la formule ordinaire de Taylor pour les fonctions de n variables. Si la fonctionnelle est dérivable d'un ordre quelconque et que les conditions qui permettent d'écrire (11) soient satisfaites, quel que soit p, si enfin la limite du dernier terme est zéro pour p infini, nous aurons le développement en série

$$(11_1)\quad \mathrm{F}[y+\varphi] = \mathrm{F}[y] + \sum_{1}^{\infty}{}_i \frac{1}{i!}\int_a^b \cdots \int_a^b \mathrm{F}^{(i)}[y;\ \xi_1, \ldots, \xi_i] \times \varphi(\xi_1)\ldots\varphi(\xi_i)\,d\xi_1\ldots d\xi_i;$$

$y(t)$ étant fixé cette formule nous donne une série de puissances fonctionnelles pour définir

$$\mathrm{G}[\varphi(t)] = \mathrm{F}[y+\varphi] \quad (^1).$$

Pour $p = 1$, la relation (11) se réduit à

$$(11')\qquad \mathrm{F}[y+\varphi] = \mathrm{F}[y] + \int_a^b \mathrm{F}'[y(t)+\theta\varphi(t), \xi]\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

qui constitue la généralisation fonctionnelle de la formule des accroissements finis. En supposant que la fonction $\varphi(t)$ ne change pas de signe dans (a, b), on en tire

$$(11'')\qquad \mathrm{F}[y+\varphi] - \mathrm{F}[y] = \mathrm{F}'[y(t)+\theta\varphi(t), \xi']\int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi,$$

ξ' ayant une valeur comprise entre a et b.

Cette dernière formule permet de justifier le principe de symétrie des dérivées fonctionnelles énoncé au n° **11** (²). Il suffit évidemment d'établir cette symétrie pour la dérivée seconde, c'est-à-dire de montrer que

$$\mathrm{F}''[y(t), \xi_1, \xi_2] = \mathrm{F}''[y(t), \xi_2, \xi_1].$$

(¹) *Cf.* Chap. III, nos 23, 24.

(²) *Cf.* Volterra, [105].

Or soient (a_1, b_1) et (a_2, b_2) deux intervalles intérieurs à (a, b) et contenant respectivement ξ_1 et ξ_2 et envisageons une fonction $\varphi_1(t)$ nulle à l'extérieure de (a_1, b_1) et positive dans cet intervalle ainsi qu'une fonction $\varphi_2(t)$ nulle, sauf dans (a_2, b_2) où elle est positive. Formons l'expression

$$M = F[y + \varphi_1 + \varphi_2] - F[y + \varphi_1] - F[y + \varphi_2] + F[y]$$

qui peut s'écrire

(12) $$M = u[y + \varphi_2] - u[y]$$

ou bien

(12′) $$M = v[y + \varphi_1] - v[y],$$

en posant

$$u[y] = F[y + \varphi_1] - F[y]$$

et

$$v[y] = F[y + \varphi_2] - F[y].$$

Posons, pour abréger,

$$S_1 = \int_{a_1}^{b_1} \varphi_1(\xi)\,d\xi, \qquad S_2 = \int_{a_2}^{b_2} \varphi_2(t)\,dt.$$

En prenant M sous la forme (12) il vient, d'après (11″),

$$M = u'[\varphi(t) + \theta'_2\,\varphi_2(t), \xi'_2].S_2.$$

et, en utilisant encore (11″) pour transformer la dérivée fonctionnelle u',

$$M = F''[y + \theta'_1\,\varphi_1(t) + \theta'_2\,\varphi_2(t), \xi'_2, \xi'_1].S_2.S_1,$$

formule dans laquelle θ'_1 et θ'_2 sont compris entre *zéro* et *un* et ξ'_1, ξ'_2 respectivement intérieurs à (a_1, b_1) et (a_2, b_2). En partant de (12′), on aura de même

$$M = F''[y, \theta''_1\,\varphi_1(t) + \theta''_2\,\varphi_2(t), \xi''_1, \xi''_2].S_1.S_2.$$

Faisons enfin tendre vers zéro les segments (a_1, b_1) et (a_2, b_2) ainsi que le maximum de $|\varphi_1(t)|$ et $|\varphi_2(t)|$; ξ'_1 et ξ''_1 tendent vers ξ_1, ξ'_2 et ξ''_2 vers ξ_2, et l'on a à la limite

$$F''[y(t), \xi_2, \xi_1] = F''[y(t), \xi_1, \xi_2],$$

pourvu que cette dérivée seconde soit *continue* par rapport à l'argument $y(t)$ et aux variables ξ_1, ξ_2.

14. Différentielles successives. Cas plus généraux. — Dans les numéros précédents nous nous sommes limités au cas où les dérivées successives de F vérifiaient des conditions du type I, II, III du n° 3. Les différentielles successives étaient alors des fonctionnelles *régulières*. Ce n'est évidemment pas le cas le plus général : on pourra avoir des différentielles $\delta^p F$ s'exprimant par des intégrales multiples de Stieltjes (en admettant que ces différentielles, définies comme au n° 12, ont la continuité élémentaire d'ordre zéro). Le développement de Taylor s'étend sans difficultés.

Les cas particuliers les plus importants sont d'ailleurs celui où la différentielle $\delta^p F$ a la forme *régulière* et celui où elle a la forme *normale* (Chap. III, n° 21).

15. Prenons, par exemple, le cas de $p=2$, une différentielle *régulière* sera du type

$$\delta^2 F = \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, \delta y(\xi_1)\, \delta y(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2 \tag{13}$$

et une différentielle *normale* du type

$$\delta^2 F = \int_a^b H(\xi) \{\delta y(\xi)\}^2\, d\xi + \int_a^b \int_a^b K(\xi_1, \xi_2)\, \delta y(\xi_1)\, \delta y(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2. \tag{14}$$

Lorsque, pour une valeur déterminée de l'argument $y(t)$, on a obtenu une différentielle seconde du type (13) ou (14), il est naturel de considérer $K(\xi_1, \xi_2)$ comme une dérivée fonctionnelle seconde. Lorsque, (13) ou (14) étant valable pour différentes valeurs de l'argument $y(t)$, $K(\xi_1, \xi_2)$ et $H(\xi)$ seront des fonctionnelles de y, on pourra poser

$$F''[y(t);\, \xi_1, \xi_2] = K\left[\overset{b}{\underset{a}{y(t)}};\, \xi_1, \xi_2\right];$$

il faut seulement noter que c'est là une définition de la dérivée fonctionnelle seconde un peu plus large que celle du début.

Dans le cas où la différentielle seconde a la forme (14), il faut

ajouter la remarque suivante :

$$K\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}});\ \xi_1,\ \xi_2\right]$$

joue le rôle que jouerait la dérivée partielle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y_i\,\partial y_k} \qquad (i \neq k)$$

pour une fonction de n variables; suivant le cas, l'une ou l'autre des deux fonctionnelles

$$H\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}),\ \xi\right]$$

et

$$K\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}});\ \xi,\ \xi\right]$$

pourra tenir le rôle des dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}$ prises en dérivant deux fois par rapport à la même variable. En particulier, comme l'ont montré les travaux de M. P. Lévy, l'équation

$$\int_a^b H\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}),\ \xi\right] d\xi$$

réalise une extension intéressante, dans le champ fonctionnel, de l'équation de Laplace à n variables (¹). M. Volterra a montré [115] l'intérêt que présentaient des équations telles que

$$\int_a^b K\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}});\ \xi,\ \xi\right] d\xi + \int_a^b \int_a^b K\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}});\ \xi_1,\ \xi_2\right] h(\xi_1,\ \xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2.$$

16. Différentielles de M. Fréchet. — Nous avons dit que la définition précédemment adoptée pour les différentielles d'une fonctionnelle n'était pas exactement la même que celle donnée par M. Fréchet (²).

M. Fréchet fait en effet dépendre la définition des différentielles de la *distance* dans l'espace fonctionnel considéré : il définit δF comme

(¹) Bibliographie [75], p. 86.
(²) Page 71, note (¹).

une fonctionnelle linéaire de δy telle que

$$\frac{F[y+\delta y]-F[y]-\delta F}{\|\delta y\|},$$

où $\|\delta y\|$ désigne la distance fonctionnelle entre $y+\delta y$ et y, *tende vers zéro quand* $\|\delta y\|$ *tend vers zéro*. De même la différentielle seconde sera une fonctionnelle entière homogène et du second degré en δy, vérifiant

$$\lim_{\|\delta y\|=0} \frac{F[y+\delta y]-F[y]-\delta F-\frac{1}{2}\delta^2 F}{\|\delta y\|^2}=0;$$

de même enfin pour la différentielle $p^{\text{ième}}$ avec la condition

$$\lim_{\|\delta y\|=0} \frac{F[y+\delta y]-F[y]-\delta F-\frac{1}{2}\delta^2 F-\ldots-\frac{1}{p!}\delta^p F}{\|\delta y\|^p}=0.$$

Ces définitions sont un peu plus restrictives que les précédentes. Posons, comme au n° 1, $\delta y=\varepsilon\theta(t)$ et remarquons que, pour toutes les définitions de la distance, $\|\delta y\|$ a un facteur ε : dans ces conditions il est clair qu'une différentielle au sens adopté plus haut sera différentielle au sens de M. Fréchet, si la limite qui la définit [formule (2) par exemple] est obtenue uniformément par rapport à $\theta(t)$. La restriction ainsi introduite est d'ailleurs utile dans bien des applications.

17. Dérivation d'une fonctionnelle composée. — Pour généraliser par exemple le théorème sur la dérivation d'une fonction composée, il sera commode de se placer au point de vue de M. Fréchet [1].

Admettons que la fonction-argument, que nous désignerons par $y(t,\alpha)$ dépende du paramètre α et supposons que, dans les intervalles $\alpha_1 \leqq \alpha \leqq \alpha_2$, $a \leqq t \leqq b$, la fonction $y(t,\alpha)$ ait une dérivée bornée et continue par rapport à α. Il est facile de vérifier que, dans ce cas, si la fonctionnelle

$$F\Big[y\big(\overset{b}{\underset{a}{t}}\big)\Big]$$

est différentiable au sens de M. Fréchet, alors la dérivée $\frac{df}{d\alpha}$ de la fonc-

[1] Fréchet, [38].

tion

$$f(\alpha) = F\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}, \alpha)\right]$$

existe pour α compris entre α_1 et α_2 et que

$$(15) \qquad \frac{df}{d\alpha} = \frac{d}{d\alpha} F[y(t, \alpha)] = \delta F[y(t, \alpha), y'(t, \alpha)] \quad (^1).$$

Posant en effet

$$\Delta y = y(t, \alpha + \Delta\alpha) - y(t, \alpha),$$

l'existence de la différentielle implique que

$$\frac{F[y + \Delta y] - F[y] - \delta F[y, \Delta y]}{\|\Delta y\|} \to 0,$$

ce qui peut encore s'écrire

$$\lim_{\Delta\alpha \to 0} \left\{ \frac{F[y + \Delta y] - F[y]}{\Delta\alpha} - \delta F\left[y, \frac{\Delta y}{\Delta\alpha}\right] \right\} \frac{1}{\dfrac{\|\Delta y\|}{\Delta\alpha}} = 0,$$

et le résultat annoncé en découle parce que $\dfrac{\|\Delta y\|}{\Delta\alpha}$ reste limité d'après les hypothèses faites.

La formule (15) généralise la règle de dérivation d'une fonction composée de la variable α, $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, avec $y_i = y_i(\alpha)$,

$$(16) \qquad \frac{df}{d\alpha} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial y_i} \frac{dy_i}{d\alpha}.$$

Dans le cas particulier où la différentielle δF est régulière, (15) devient

$$(15') \qquad \frac{df}{d\alpha} = \int_a^b F'[y(t, \alpha); \xi] y'_\alpha(\xi, \alpha) \, d\xi,$$

déduite de (16) par le principe de passage du discontinu au continu.

18. La formule (15) a la conséquence suivante : si $F[y(t)]$ a un minimum ou un maximum relatif pour la fonction

$$y_0(t) = y(t, \alpha_0),$$

c'est-à-dire si l'on a toujours

$$F[y_0(t)] < \text{ ou } > F[y(t)]$$

---

(1) On se rappelle que δF est fonctionnelle des deux arguments y, δy. Ces deux arguments doivent, dans le dernier membre de (15), avoir les valeurs $y(t, \alpha)$, $y'(t, \alpha)$.

pour y assez voisine de y_0, alors la quantité $\frac{df}{d\alpha}$ doit être nulle pour $\alpha = \alpha_0$. En d'autres termes *la première différentielle*

$$\delta\,\mathrm{F}[y(t),\ \varphi(t)] \tag{17}$$

d'une fonctionnelle doit être nulle, identiquement par rapport à $\varphi(t)$, *pour les fonctions* $y_0(t)$ *qui rendent la fonctionnelle maximum ou minimum* [1]. Lorsque (15′) est valable (fonctionnelle dérivable) nous avons comme conséquence que la dérivée fonctionnelle

$$\mathrm{F}'[y(t),\ \xi] \tag{17′}$$

est identiquement nulle en ξ pour les fonctions $y_0(t)$ qui rendent F maximum ou minimum [2].

19. La condition (17) ou (17′) étant remplie, le signe de la différentielle seconde $\delta^2\mathrm{F}$ peut donner des conditions suffisantes pour le maximum ou minimum : *si, pour l'argument* $y(t)$, $\delta\mathrm{F}$ *est identiquement nulle et s'il existe un nombre positif* k *tel que*

$$\delta^2\mathrm{F} > k\,\|\delta y\|^2$$

pour les fonctions δy *pour lesquelles* $\|\delta y\|$ *est assez petit*, F *a un minimum relatif pour l'argument* $y(t)$.

En effet, on sait que

$$\frac{\mathrm{F}[y+\delta y]-\mathrm{F}[y]-\frac{1}{2}\delta^2\mathrm{F}}{\|\delta y\|^2}$$

tend vers zéro avec le dénominateur; on en tire

$$\mathrm{F}[y+\delta y]-\mathrm{F}[y] > \|\delta y\|^2\left\{\frac{k}{2}-\varepsilon\right\}$$

et, pour $\|\delta y\|$ assez petit, $\frac{k}{2}-\varepsilon$ sera positif, d'où le résultat.

Le champ d'application de ce théorème est plus restreint qu'on ne pourrait penser à première vue : en ce qui concerne les fonctionnelles du calcul des variations, il ne serait applicable que dans un champ fonctionnel trop restreint (*cf.* d'ailleurs n° 8). On sait combien est

---

(1) Volterra, [108].

(2) (17) ou (17′) ayant lieu, il n'y a pas forcément maximum ou minimum; on peut dire que la fonctionnelle est *stationnaire*.

délicate, en calcul des variations, l'étude des conditions du deuxième ordre déduites de la considération de $\delta^2 F$.

III. — EXEMPLES.

20. Prenons une fonctionnelle régulière de degré n

$$F[y(t)] = k_0 + \sum_1^n {}_i \int_a^b \ldots \int_a^b k_i(\xi_1, \ldots, \xi_n) y(\xi_1) \ldots y(\xi_n)\, d\xi_1 \ldots d\xi_n,$$

où l'on peut, comme nous l'avons vu, supposer que les noyaux sont symétriques par rapport aux variables qui y figurent. La différentielle sera

$$\delta F = \sum_1^n {}_i\, i \int_a^b \delta y(\xi)\, d\xi \left\{ \int_a^b \ldots \int_a^b k_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi) \times y(\xi_1) \ldots y(\xi_{i-1})\, d\xi_1 \ldots d\xi_{i-1} \right\}.$$

et la dérivée fonctionnelle sera

$$F'[y(t), \xi] = k_1(\xi) + \sum_2^n {}_i\, i \int_a^b \ldots \int_a^b k_i(\xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi) \times y(\xi_1) \ldots y(\xi_{i-1})\, d\xi_1 \ldots d\xi_{i-1}$$

fonctionnelle régulière en y de degré $n-1$. En général, après p dérivations, on obtiendra $F^{(p)}[y; \xi_1, \ldots, \xi_p]$ fonctionnelle de degré $n-p$ si $n > p$, égale à $n!\, k_n(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ si $n = p$, nulle enfin si $n < p$.

21. Prenons maintenant une fonctionnelle normale, du second degré, pour abréger, soit

$$F[y(t)] = k_0 + \int_a^b k_1(\xi) y(\xi)\, d\xi + \int_a^b h(\xi) y^2(\xi)\, d\xi + \int_a^b \int_a^b k_2(\xi_1, \xi_2) y(\xi_1) y(\xi_2)\, d\xi_1\, d\xi_2,$$

nous aurons la différentielle

$$\delta F = \int_a^b k_1(\xi)\, \delta y(\xi)\, d\xi + 2 \int_a^b h(\xi) y(\xi)\, \delta y(\xi)\, d\xi + 2 \int_a^b \int_a^b k_2(\xi, \eta) y(\xi)\, \delta y(\eta)\, d\xi\, d\eta$$

et la dérivée première

$$F'[y(t), \xi] = k_1(\xi) + 2h(\xi)y(\xi) + 2\int_a^b k_2(\xi_1, \xi)y(\xi_1)\,d\xi_1,$$

fonctionnelle du premier degré en y qui dépend spécialement de la valeur de $y(t)$ au point ξ.

22. Notons en passant que, lorsqu'on écrit qu'une fonctionnelle de l'un des types précédents est stationnaire en annulant la dérivée F′, quel que soit ξ, on obtient, pour le cas régulier du second degré,

$$k_1(\xi) = -2\int_a^b k_2(t, \xi)y(t)\,dt \tag{18}$$

et, pour le cas normal,

$$y(\xi) = -\frac{k_1(\xi)}{2h(\xi)} - \frac{1}{h(\xi)}\int_a^b k_2(t, \xi)y(t)\,dt. \tag{19}$$

Les équations de ce genre seront étudiées ultérieurement : ce sont des équations intégrales linéaires par rapport à la fonction inconnue $y(t)$, respectivement de première espèce (18) et de seconde espèce (19).

23. Soit la fonctionnelle

$$F|y(t)| = \int_a^b f\big(t, y(t), y'(t), \ldots, y^{(n)}(t)\big)\,dt,$$

du type qui apparaît en calcul des variations. Nous supposerons la fonction f finie et continue ainsi que celles de ses dérivées partielles dont nous aurons besoin. F a un sens pour les fonctions $y(t)$ dérivables jusqu'à l'ordre n inclus; mais, pour mettre δF sous la forme habituelle, il faut se placer dans le champ des fonctions $y(t)$ dérivables jusqu'à l'ordre $2n$ inclus et l'on obtient pour δF

$$\delta F = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} + \frac{d^2}{dt^2}\frac{\partial f}{\partial y''} - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dt^n}\frac{\partial f}{\partial y^{(n)}}\right]\delta y(t)\,dt + \ldots,$$

les points désignant des termes qui dépendent de $\delta y, \ldots, \delta y^{n-1}$ aux points exceptionnels a et b.

La dérivée fonctionnelle première est

$$F'[y(t), \xi] = \left\{ \frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} + \dots \right\}_{t=\xi},$$

c'est une fonction ordinaire de $y, y', \dots, y^{(2n)}$ calculés pour $t = \xi$. Si on l'annule on obtient, pour déterminer les fonctions $y(t)$ qui rendent stationnaire la fonctionnelle, *l'équation différentielle*

$$\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial f}{\partial y'} + \dots = 0$$

(équation d'Euler).

24. Soit enfin

$$F[y(t)] = \int_a^b f_1\big(\xi, y(\xi), y'(\xi)\big)\, d\xi + \int_a^b \int_a^b f_2\big(\xi, \eta, y(\xi), y(\eta), y'(\xi), y'(\eta)\big)\, d\xi\, d\eta,$$

où f_2 est supposée symétrique en ξ et η quelle que soit y. Sa différentielle sera donnée par la formule

$$\delta F = \int_a^b \delta y(\xi)\, d\xi \left[\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial f_1}{\partial y'} + 2\int_a^b \left(\frac{\partial f_2}{\partial y(\xi)} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial f_2}{\partial y'(\xi)} \right) d\eta \right],$$

en négligeant des termes qui dépendent des valeurs de δy en a et b.

En égalant à zéro sa dérivée fonctionnelle nous aurons, pour déterminer l'inconnue y, l'équation fonctionnelle suivante :

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial f_1}{\partial y'} + 2\int_a^b \left(\frac{\partial f_2}{\partial y(\xi)} - \frac{d}{d\xi}\frac{\partial f_2}{\partial y'(\xi)} \right) d\eta = 0.$$

L'inconnue y y figure à la fois par ses dérivées et sous le signe d'intégration. C'est donc une équation qui participe à la fois du caractère des équations intégrales et des équations différentielles. M. Volterra a nommé les équations de ce type *équations intégro-différentielles*. Nous aurons à les étudier ultérieurement ([1]).

([1]) On trouvera d'autres exemples dans les Leçons sur les fonctions de lignes [113] de M. Volterra, Chapitre III.

IV. — L'INTÉGRATION DES FONCTIONNELLES.

25. Bien des problèmes se posent à ce sujet. Certains d'entre eux paraissent d'ailleurs fort difficiles et ont été à peine abordés.

Dans le présent paragraphe nous réunissons l'exposé de quelques questions concernant l'intégration des fonctionnelles et qui peuvent montrer les divers points de vue. Nous aurons d'ailleurs l'occasion, dans les volumes suivants de l'Ouvrage et à propos des applications, de compléter l'étude que nous abordons ici.

Nous signalerons un important Mémoire de M. Fréchet [41] où il donne une définition très générale de l'intégrale d'une fonctionnelle abstraite sur un ensemble abstrait. Il serait certainement intéressant de chercher à tirer parti de cette définition en se plaçant au point de vue du calcul fonctionnel.

26. Détermination d'une fonctionnelle dont on connaît la dérivée. — Un premier point de vue consiste à rechercher *l'opération inverse de la dérivation* fonctionnelle (¹).

D'une façon précise le problème peut être posé de la façon suivante : on donne une fonctionnelle

$$G\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}), \xi\right],$$

où figure un paramètre ξ $(a \leqq \xi \leqq b)$ définie, par exemple, dans le champ des fonctions $y(t)$ finies et continues. *Reconnaître si* G *est la dérivée fonctionnelle d'une* $F\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right]$ *définie dans le même champ; lorsqu'il en est ainsi, calculer* F.

Le principe de passage du discontinu au continu guidera ici de façon très efficace. Le problème d'analyse ordinaire correspondant est le suivant : *reconnaître si n fonctions des variables* $y_1, y_2, \ldots, y_n$, *soient* $X_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$, *sont les dérivées partielles d'une fonction* $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ *que l'on déterminera.* Or ce dernier problème peut être traité par l'application de la formule de Stokes, qu'il s'agit donc d'étendre aux fonctionnelles.

(¹) VOLTERRA, [113], p. 43.

Soit à cet effet, dans un plan auxiliaire (u, v), une aire simple ω limitée par le contour fermé c. Faisons correspondre à chaque point de l'aire une fonction-argument que nous noterons

$$y(t;\, u,\, v)$$

et désignons par $y(t;\, s)$ celle de ces fonctions qui correspond à un point du contour de ω, point repéré par le paramètre s. On démontre que

$$(20)\quad \int_c ds \int_a^b \mathrm{G}|y(t;\, s);\, \xi|\, \frac{dy(\xi;\, s)}{ds}\, d\xi$$
$$= \frac{1}{2}\int_\omega du\, dv \int_a^b \int_a^b \left(\mathrm{G}'[y(t;\, u,\, v);\, \eta,\, \xi] - \mathrm{G}'|y(t;\, u,\, v);\, \xi,\, \eta]\right)$$
$$\times \frac{\mathrm{D}\big(y(\xi;\, u,\, v),\, y(\eta;\, u,\, v)\big)}{\mathrm{D}(u,\, v)}\, d\xi\, d\eta,$$

formule qui généralise la formule de Stokes. Dans cette formule G′ désigne la dérivée fonctionnelle de G prise au point (ξ ou η) qu'indique la dernière variable;

$$\frac{\mathrm{D}\big(y(\xi;\, u,\, v),\, y(\eta;\, u,\, v)\big)}{\mathrm{D}(u,\, v)}$$

est le déterminant fonctionnel des deux fonctions $y(\xi;\, u,\, v)$, $y(\eta;\, u,\, v)$ par rapport à u et v.

On établit (20) en appliquant la formule de Green

$$\int_c \mathrm{U}\, du + \mathrm{V}\, dv = \int_\omega \left(\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial u} - \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial v}\right) du\, dv$$

à la transformation de l'intégrale curviligne du premier membre. Le calcul est immédiat; on doit supposer que la fonctionnelle G est dérivable et que sa différentielle a la forme régulière (n° 3)

$$\int_a^b \mathrm{G}'[y;\, \eta,\, \xi]\, \delta y(\xi)\, d\xi.$$

La formule (20) permet de résoudre le problème posé. Pour calculer $\mathrm{F}[y(t)]$ on pourra choisir arbitrairement sa valeur quand $y(t)$ prend une valeur $y_0(t)$ appartenant au champ fonctionnel considéré, puis on construira une fonction de deux variables $y(t;\, s)$ qui prenne les valeurs $y_0(t)$ et $y(t)$ lorsque s prend les valeurs s_0 et s_1 et qui reste dans le champ fonctionnel où l'on s'est placé.

On aura enfin

$$(21)\qquad F[y(t)] = F[y_0(t)] + \int_{s_0}^{s_1} ds \int_a^b G[y(t;\, s);\, \eta]\, \frac{dy(\eta;\, s)}{ds}\, d\eta.$$

Encore faut-il que l'expression précédente ne dépende pas de la loi $y(t;\, s)$ adoptée pour passer de $y_0(t)$ à $y(t)$, lorsque s varie, de s_0 à s_1. Cela entraîne que le premier membre de (20) soit identiquement nul quels que soient ω et $y(t;\, u,\, v)$, d'où la condition

$$(22)\qquad G'[y(t);\, \eta,\, \xi] = G'[y(t);\, \xi,\, \eta]$$

nécessaire et suffisante. Cette condition étant remplie, F est déterminée à une constante près

$$\big(F[y_0(t)]\big).$$

Notons que G' est la dérivée fonctionnelle seconde de F de sorte que nous établissons ainsi le théorème déjà donné (n° 11) : *l'ordre de deux dérivations fonctionnelles n'a pas d'effet sur le résultat.*

Comme cas particulier on a le résultat suivant, dont la démonstration directe est d'ailleurs aisée : si $F'[y(t),\, \xi]$ est identiquement nulle, la fonctionnelle F se réduit à une constante.

27. Cas où la différentielle de F n'a pas la forme régulière. – Le calcul précédent concerne en fait la détermination d'une fonctionnelle dont on connaît la différentielle, laquelle est régulière. Mais il n'est pas difficile de passer au cas général.

Donnons-nous la fonctionnelle

$$\Gamma\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}),\ \delta y(\overset{a}{\underset{a}{t}})\right]$$

dépendant des deux arguments $y(t)$, $\delta y(t)$ et linéaire par rapport à $\delta y(t)$. *Nous chercherons à déterminer une fonctionnelle*

$$F\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right]$$

dont Γ *serait la différentielle.*

Puisque Γ est linéaire en δy, il n'y a pas de difficulté à la différentier en faisant varier le seul argument δy. Nous admettrons que lorsque, en maintenant fixe δy, on donne à y une variation Δy la diffé-

rentielle correspondante de Γ existe également et nous la noterons

$$\mathrm{H}\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}),\ \delta y(\overset{b}{\underset{a}{t}}),\ \Delta y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right].$$

Nous supposerons enfin remplies les conditions nécessaires pour que l'on puisse utiliser les différentielles précédentes pour la dérivation par rapport à des paramètres dont dépendront y et δy [*cf.* n° 17, formule (15)]. En reprenant les calculs du numéro précédent on constate alors que la formule de Stokes généralisée est remplacée par la suivante :

$$(23)\quad \int_{\mathrm{C}} \Gamma\left[y(t;\ s),\ \frac{\partial y(t;\ s)}{\partial s}\right] ds$$
$$= \int_{\omega} du\,dv \left\{ \mathrm{H}\left[y(t;\ u,\ v),\ \frac{\partial y(t;\ u,\ v)}{\partial v},\ \frac{\partial y(t;\ u,\ v)}{\partial u}\right] - \mathrm{H}\left[y(t;\ u,\ v),\ \frac{\partial y(t;\ u,\ v)}{\partial u},\ \frac{\partial y(t;\ u,\ v)}{\partial v}\right] \right\}.$$

Pour l'existence de F *il est donc nécessaire et suffisant que*

$$(24)\qquad \mathrm{H}[y,\ \delta y,\ \Delta y] = \mathrm{H}[y,\ \Delta y,\ \delta y]$$

quelles que soient les fonctions y, δy, Δy du champ où l'on s'est placé et F sera donnée par la formule

$$\mathrm{F}[y(t)] = \mathrm{F}[y_0(t)] + \int_{s_0}^{s_1} \Gamma\left[y(t;\ s),\ \frac{\partial y(t;\ s)}{\partial s}\right] ds.$$

28. La propriété exprimée par (24) donne, en somme, l'extension la plus large du principe d'inversion de deux dérivations fonctionnelles (cf. *supra* n° 11 et fin du n° 26).

Voici, comme conséquence, un résultat énoncé par M. Volterra dans un cours professé à Rome en 1926. Admettons que la différentielle donnée

$$\Gamma\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}),\ \delta y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right]$$

soit de forme

$$(25)\qquad \Gamma = \mathrm{A}\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right]\delta y(\alpha) + \int_a^b \mathrm{B}\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}),\ \xi\right]\delta y(\xi)\,d\xi,$$

avec la valeur exceptionnelle α et supposons que, quand on donne

à y l'accroissement $\Delta y(t)$, A et B aient des différentielles de même forme, respectivement égales à

$$\text{(26)}\qquad A_1\left[y\binom{b}{t}_a\right]\Delta y(\alpha)+\int_a^b A_2\left[y\binom{b}{t}_a,\ \xi\right]\Delta y(\xi)\,d\xi,$$

$$\text{(27)}\qquad B_1\left[y\binom{b}{t}_a,\ \xi\right]\Delta y(\alpha)+\int_a^b B_2\left[y\binom{b}{t}_a,\ \xi,\ \eta\right]\Delta y(\eta)\,d\eta.$$

En remplaçant dans (25) A et B respectivement par les expressions (26) et (27) on a la précédente H et l'équation (24) exprime que

$$\delta y(\alpha)\int_a^b A_2\left[y\binom{b}{t}_a,\ \xi\right]\Delta y(\xi)\,d\xi+\Delta y(\alpha)\int_a^b B_1\left[y\binom{b}{t}_a,\ \xi\right]\delta y(\xi)\,d\xi$$
$$+\int_a^b d\xi\int_a^b d\eta\, B_2\left[y\binom{b}{t}_a,\ \xi,\ \eta\right]\delta y(\xi)\Delta y(\eta)$$

doit être symétrique par rapport aux fonctions $\delta y(t)$, $\Delta y(t)$ quelles que soient ces fonctions. On en tire non seulement que B_2 est symétrique par rapport aux variables ξ, η (ce qui est le principe d'inversion du n° 11) mais encore

$$A_2[y(t),\ \xi]\equiv B_1\left[y\binom{b}{t}_a,\ \xi\right].$$

Quand une fonctionnelle F *donne une partie exceptionnelle de coefficient* A *et une dérivée fonctionnelle* B, *il y a symétrie entre la dérivée fonctionnelle de* A *et le coefficient d'un terme exceptionnel qui se présentera en différentiant* B.

29. M. P. Lévy a envisagé [1] le cas où la différentielle donnée a la forme régulière [2]

$$\int_a^b G\left[y\binom{b}{t}_a,\ \xi\right]\delta y(\xi)\,d\xi,$$

la différentielle de G n'étant plus régulière, mais ayant la forme

$$\delta G = A_0\,\delta y+\ldots+A_p\,\delta y^{(p)}+\int_a^b K(\xi,\ \eta)\,\delta y(\eta)\,d\eta$$

avec une partie exceptionnelle dans laquelle δy, $\delta y'$, ..., $\delta y^{(p)}$ sont

---

(1) [75], p. 90-94.

(2) Avec éventuellement des parties exceptionnelles concernant les limites de l'intervalle d'intégration, et dont il est aisé de tenir compte.

calculés pour la valeur ξ; $A_0, \ldots, A_p$ sont des fonctions de ξ; ce sont aussi, ainsi que K, des fonctionnelles de y, mais nous ne l'indiquons pas pour ne pas charger l'écriture. En posant pour abréger

$$\delta G = M\left[\underset{a}{\overset{b}{y(t)}}, \delta \underset{a}{\overset{b}{y(t)}}; \xi\right],$$

la condition de symétrie (24) donne la relation obtenue directement par M. P. Lévy

$$\int_a^b M[y, \Delta y; \xi]\,\delta y(\xi)\,d\xi = \int_a^b M[y, \delta y; \xi]\,\Delta y(\xi)\,d\xi,$$

qui doit être vérifiée identiquement. M. P. Lévy dit alors que l'expression M est sa propre adjointe; les conditions à remplir pour cela sont immédiates : en particulier $K(\xi, \eta)$ doit être fonction symétrique en ξ et η et l'expression différentielle

$$A_0\,\delta y + \ldots + A_p\,\delta y^{(p)}$$

doit être adjointe d'elle-même au sens de *Lagrange;* elle a donc une forme bien connue.

30. **Généralisations diverses.** — Les calculs qui précèdent concernent dans l'ensemble l'intégrale curviligne dans l'espace fonctionnel, une *courbe* de cet espace correspondant à une famille de fonctions $y(t)$ dépendant d'un paramètre. Nous avons donné diverses formes du théorème analogue au théorème de Stokes concernant une intégrale curviligne prise suivant une *courbe fermée* de l'espace fonctionnel. Il n'y a pas lieu d'insister sur les généralisations faciles relatives à des intégrales prises sur des multiplicités de l'espace fonctionnel, multiplicités dépendant d'un nombre quelconque, mais *fini*, de paramètres. Nous aurons d'ailleurs l'occasion d'y revenir à propos des applications.

Nous donnerons, pour terminer ce Chapitre, quelques indications sur un problème bien plus difficile : l'extension de la notion d'intégrale à une portion de l'espace fonctionnel qui ne dépend plus seulement d'un nombre *fini* de paramètres.

31. **L'intégrale multiple et la notion de moyenne dans l'espace fonc-**

tionnel. — Pour une fonction de n variable $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ il n'y a pas de difficulté à définir l'intégrale multiple d'ordre n : par exemple

$$I = \int_{a_1}^{b_1} dy_1 \ldots \int_{a_n}^{b_n} f(y_1, y_2, \ldots, y_n)\, dy_n,$$

l'intégration étant effectuée pour un parallélipipède P_n de l'espace à n dimensions. En divisant I par le volume de ce parallélipipède

$$V_n = (b_1 - a_1)(b_2 - a_2)\ldots(b_n - a_n),$$

on a la *valeur moyenne* de f dans P_n. On peut chercher à introduire des notions analogues pour les fonctionnelles en utilisant le procédé habituel de passage d'un nombre fini à une infinité de variables : il s'agit donc de définir l'intégrale ou la valeur moyenne dans un champ fonctionnel à une infinité de dimensions.

Une première difficulté se présente lorsqu'il s'agit de définir le *volume* ou la *mesure* d'un champ fonctionnel de telle sorte qu'il jouisse de la propriété d'être une *fonction additive* de cet ensemble. Prenons, par exemple le champ de toutes les fonctions $y(t)$ pour lesquelles

$$y_1(t) \leqq y(t) \leqq y_2(t)$$

avec $y_2(t) - y_1(t) > 0$, champ qui peut être considéré comme un parallélépipède de l'espace fonctionnel : le volume, produit de toutes les différences possibles $y_2(t) - y_1(t)$, serait nul si

$$y_2(t) - y_1(t) < 1$$

et infini si

$$y_2(t) - y_1(t) > 1.$$

Gateaux évite cette difficulté en définissant directement la *moyenne* d'une fonctionnelle dans un champ donné. Ses travaux (¹) sur ce sujet vont dans plusieurs directions que nous indiquerons ici (²).

32. Première méthode de Gateaux. — Observons que, dans le cas des fonctions ordinaires $f(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ la moyenne coïncide avec

---

(¹) GATEAUX, [55], [57].

(²) Les travaux de Gateaux ont été poursuivis par M. P. Lévy, qui a beaucoup perfectionné les méthodes, et a développe d'importantes applications, telle la belle théorie des fonctionnelles harmoniques. *Cf* [75]. Nous y reviendrons dans le second volume du présent Ouvrage.

l'intégrale si le champ considéré est le cube à n dimensions

$$0 \leqq y_i \leqq 1 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

Gateaux se limite d'abord à une fonctionnelle

$$F\left[y\binom{b}{t}{a}\right]$$

prise dans le champ des fonctions qui restent, quel que soit t, comprises entre 0 et 1.

Prenant $y(t)$ quelconque dans le champ précédent et un nombre $h (0 < h < 1)$, notons $\overline{y}(t, h)$ la fonction définie par les égalités

$$\begin{aligned} \overline{y}(t, h) &= y(t) + h \qquad &\text{lorsque } y(t) + h \leqq 1, \\ &= y(t) + h - 1 \qquad &\text{lorsque } y(t) + h > 1, \end{aligned}$$

$F[\overline{y}(t, h)]$ est une fonction ordinaire de h, $f(h)$, définie dans l'intervalle 0, 1. Calculons alors

$$I_1\left[y\binom{b}{t}{a}\right] = \int_0^1 F[\overline{y}(t, h)]\, dh.$$

Si nous désignons par L et l respectivement la borne supérieure et la borne inférieure de la fonctionnelle F dans le champ, l'intégrale I_1 est nécessairement comprise entre L et l et, si $y(t)$ est fixée, elle représente la moyenne de F pour l'infinité simple des fonctions $\overline{y}(t, h)$.

Désignons par L_1 et l_1 les bornes supérieures et inférieures de I_1 quand y varie dans le champ considéré, nous aurons

$$l \leqq l_1 \leqq L_1 \leqq L.$$

Divisons alors l'intervalle (a, b) en deux parties (a, c) et (c, b) et, d'une fonction choisie $y(t)$ déduisons $\overline{y}(t, h_1, h_2)$ égale à $y(t) + h_1$ dans l'intervalle (a, c) et à $y(t) + h_2$ dans l'intervalle (c, b) (en convenant toujours de retrancher 1 si les valeurs obtenues dépassent l'unité).

$$I_2\left[y\binom{b}{t}{a}\right] = \int_0^1 \int_0^1 F[\overline{y}(t, h_1, h_2)]\, dh_1\, dh_2$$

représentera la valeur moyenne de F pour l'ensemble à deux paramètres des fonctions $\overline{y}(t, h_1, h_2)$. Elle aura pour bornes L_2 et l_2 et

l'on vérifie sans peine que

$$l \leqq l_1 \leqq l_2 \leqq L_2 \leqq L_1 \leqq L.$$

En divisant en deux chacun des intervalles (a, c) *et* (c, b) on aura de même une intégrale quadruple dont les bornes l_3 et L_3 seront comprises entre l_2 et L_2 et ainsi de suite.

Il peut arriver que la suite non croissante des L_i et la suite non décroissante des l_i aient une limite commune λ : ce sera alors par définition *la moyenne de la fonctionnelle* dans le champ considéré; ce sera aussi *l'intégrale* puisque dans le cas présent il est naturel d'identifier *valeur moyenne* et *intégrale*.

Il advient malheureusement que la convergence des deux suites l_i et L_i et la valeur de leurs limites dépendront en général du procédé de division de l'intervalle (a, b) en intervalles partiels. Cette première méthode appelle donc de nouvelles recherches.

33. Nous donnerons un exemple très simple, où la méthode conduit d'ailleurs à un résultat satisfaisant.

Soit la fonctionnelle linéaire et régulière

$$F[y(t)] = \int_a^b f(t) y(t)\, dt,$$

où $f(t)$ est donnée. On a

$$F[\bar{y}(t, h)] = \int_a^b f(t) y(t)\, dt + h \int_a^b f(t)\, dt - \int_{\varepsilon_h} f(t)\, dt,$$

en désignant par ε_h l'ensemble des points du segment $(0, 1)$ pour lesquels $y(t) > 1 - h$. Il en résulte

$$I_1 = \frac{1}{2} \int_a^b f(t)\, dt + \int_a^b f(t) y(t)\, dt - \int_0^1 dh \int_{\varepsilon_h} f(t)\, dt,$$

mais le dernier terme n'est autre qu'une intégrale double de $f(t)$ étendue à l'aire de la courbe $y(t)$, il disparaît donc avec le second. I_1 est indépendant de $y(t)$, on a

$$l_1 = L_1 = \frac{1}{2} \int_a^b f(t)\, dt.$$

Toutes les autres intégrales ont la même valeur, la moyenne de F

est donc

$$\frac{1}{2}\int_a^b f(t)\,dt.$$

C'est ce que l'on pouvait attendre : pour la fonction

$$f_1 y_1 + \ldots + f_n y_n,$$

l'intégrale étendue au cube $0 \leq y_i \leq 1$ est

$$\frac{1}{2}(f_1 + f_2 + \ldots + f_n).$$

34. **Seconde méthode de Gateaux.** — Son point de départ est plus naturel : elle généralise, de façon immédiate, la remarque précédente.

Envisageons une fonctionnelle

$$F\left[y\binom{1}{t}_{0}\right]$$

dépendant de l'argument $y(t)$ dans l'intervalle $(0, 1)$ (ce qui ne restreint pas la généralité). Toute fonction $y(t)$ peut, sous des conditions très larges, être approchée en moyenne par une fonction simple prenant des valeurs constantes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dans les n intervalles

$$\left(0, \frac{1}{n}\right), \quad \left(\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \quad \ldots, \quad \left(\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n}\right),$$

l'approximation augmentant indéfiniment avec n. Or une telle fonction simple correspond au point de coordonnées $y_1, y_2, \ldots, y_n$ d'un espace E_n à n dimensions. Le domaine considéré D de l'espace fonctionnel donnera, pour les fonctions simples d'ordre n qui lui appartiennent, un certain domaine D_n de l'espace E_n, la fonctionnelle devenant une fonction ordinaire de $y_1, y_2, \ldots, y_n$ dont on peut évaluer, par des intégrations ordinaires, la valeur moyenne $\mathfrak{M}_n$ dans D_n. *Si $\mathfrak{M}_n$ tend vers une limite pour $n = \infty$, cette limite définira la valeur moyenne de la fonctionnelle.*

35. Un cas simple est celui où D est le domaine intérieur à une *sphère fonctionnelle*. On cherche alors la moyenne de F pour toutes les fonctions $y(t)$ qui vérifient

$$\int_0^1 y^2(t)\,dt = R^2$$

(sphère de rayon R). Les fonctions simples donnent alors, dans E_n le domaine D_n intérieur à l'hypersphère

$$y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^n = n\,R^2$$

de rayon $R\sqrt{n}$.

Le volume de la sphère de rayon ρ dans l'espace à n dimensions est

$$\frac{\pi^p}{p!}\,\rho^{2p} \qquad \text{si } n = 2p,$$

$$\frac{\pi^p\,2^{p+1}}{1.3.5\ldots(2p+1)}\,\rho^{2p+1} \qquad \text{si } n = 2p+1.$$

En remplaçant ρ par $R\sqrt{n}$ et utilisant l'expression asymptotique des factorielles on constate que, pour n très grand, le volume est équivalent à

$$\frac{(2\pi e)^{\frac{n}{2}}\,R^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

On ne peut donc, par le procédé précédent, définir le volume de la sphère fonctionnelle ni, par suite une intégrale étendue à ce volume; il faut se borner à la notion de moyenne.

36. Une autre extension de l'intégrale multiple aux champs fonctionnels a été donnée par M. Daniell qui envisage une fonctionnelle à variation bornée définie dans un champ à une infinité dénombrable de dimensions et étend dans ce cas le concept d'intégrale multiple de Stieltjes. L'intégrale de Daniell a été appliquée par N. Wiener à l'étude du mouvement brownien ([1]).

([1]) *Cf.* DANIELL, [16]; WIENER, [120].

CHAPITRE V.

LE CALCUL FONCTIONNEL ET LES MÉTHODES NOUVELLES DU CALCUL DES VARIATIONS.

I. — REMARQUES GÉNÉRALES.

1. Nous avons déjà eu l'occasion de dire que le Calcul des variations n'était qu'un chapitre de la théorie générale des fonctionnelles, chapitre qui se délimite par les deux réserves suivantes :

a. On ne considère que des fonctionnelles qui sont exprimées par des intégrales définies (simples ou multiples) portant sur une fonction ordinaire de la fonction-argument et de ses dérivées;

b. On n'étudie que les problèmes de maximum ou de minimum de ces fonctionnelles.

Le développement du Calcul des variations a précédé de beaucoup celui du Calcul fonctionnel et il s'est effectué, jusqu'à la fin du dernier siècle, de façon autonome.

La méthode principale était celle des équations différentielles (ou aux dérivées partielles) dans laquelle les pas successifs étaient les suivants :

1° Obtenir les équations qui expriment que la variation première est nulle (équations d'Euler, cf. *supra*, Chap. IV, n° 23).

2° Déterminer les lignes ou surfaces qui vérifient les équations et qui satisfont aux conditions aux limites imposées par le problème. Démontrer tout au moins l'existence de ces lignes ou de ces surfaces.

3° Étudier si ces lignes ou ces surfaces donnent effectivement un maximum ou un minimum.

2. Les premières liaisons entre le Calcul des variations et le Calcul

fonctionnel général furent établies par M. Volterra [1] en vue de l'extension qu'il a développée de la théorie de Hamilton-Jacobi. On sait que cette dernière théorie, qui joue un rôle notable dans l'intégration des équations de la mécanique, a son origine dans le fait que les équations différentielles de la mécanique sont les équations d'Euler d'un problème d'extremum concernant une intégrale simple (action hamiltonienne). Dans le développement de la méthode, on a à considérer cette intégrale simple comme fonction de sa limite supérieure, et c'est une fonction de point. Mais, si l'on passe à un problème de Physique mathématique dépendant de l'extremum d'une intégrale multiple, il faudra considérer cette intégrale comme fonctionnelle de la multiplicité frontière du champ d'intégration : il sera impossible, sans l'aide du Calcul fonctionnel, d'obtenir une généralisation de la théorie de Hamilton-Jacobi. C'est ce qu'a montré M. Volterra dont les travaux sur ce sujet ont été suivis par ceux de M. Fréchet. On peut y rattacher encore les belles recherches de MM. Hadamard et P. Lévy sur la fonction de Green [2].

A peu près dans le même temps divers travaux marquent l'essai de méthodes *directes* rigoureuses pour traiter les questions de Calcul des variations. Essais très importants car, dans la méthode *indirecte* dont les grandes lignes sont indiquées au n° 1, il est toujours aisé d'écrire les équations d'Euler, mais l'étude des deux autres questions — et surtout celle de la troisième — présente le plus souvent de grosses difficultés. C'est ce qui fait l'intérêt des méthodes nouvelles lesquelles prennent appui sur les notions générales de l'Analyse fonctionnelle pour la *recherche directe* du maximum ou minimum. Le Calcul des variations en a été renouvelé.

3. Les conséquences sont d'ailleurs notables dans toute la Physique mathématique. On sait que, au cours du développement historique de cette Science, il s'est très souvent révélé la tendance à réduire les problèmes naturels à des questions de minimum, ceci par suite de l'idée — plus ou moins consciente — que la nature tend, dans ses

(1) *Cf.* VOLTERRA, [109], [110]. Sur toutes les questions envisagées dans ce paragraphe, *voir* VOLTERRA, [118] où l'on trouvera une biographie détaillée.

(2) Nous reviendrons en détail sur ces divers sujets, en traitant dans le volume suivant les équations aux dérivées fonctionnelles. *Cf.* [113], Chap. III; P. LÉVY, [75].

manifestations, à épargner le plus possible ce qu'elle dépense dans l'accomplissement des divers phénomènes.

Les travaux se rattachant à cette tendance ont contribué à mettre plus d'unité dans l'édifice de la Physique mathématique. Ils eurent, à d'autres points de vue, une heureuse influence : c'est ainsi que l'emploi des formes variationnelles rend plus aisé les changements de variables et conduit naturellement à envisager l'invariance des équations par changement du système de référence. Mais, sauf en ce qui concerne la théorie de Jacobi, tous ces progrès restaient en marge de la solution même du problème, qui dépendait toujours de l'intégration d'équations différentielles avec des données aux limites. Depuis le développement des *méthodes directes*, chaque principe variationnel de la Physique mathématique peut être pris pour base d'une solution complète du problème correspondant.

4. C'est d'ailleurs l'étude de l'un de ces principes, le *principe de Dirichlet*, qui fut l'occasion du premier essai, auquel nous faisions allusion plus haut, des méthodes directes.

Rappelons que le principe de Dirichlet postule l'existence d'une fonction $\varphi(x, y)$ continue ainsi que ses dérivées dans un domaine plan Ω, prenant des valeurs assignées à la frontière de Ω, et réalisant le minimum de l'intégrale

$$J = \int\int_{\Omega} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 \right\} dx\, dy.$$

L'équation d'Euler correspondante est

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0,$$

dont il faut une solution continue prenant des valeurs assignées sur la frontière de Ω : c'est le *problème de Dirichlet*.

Lorsqu'il énonçait son principe, Dirichlet, suivi en cela par Riemann, pensait que, l'intégrale J étant toujours positive ou nulle, l'existence de la fonction $\varphi(x, y)$ était par cela même assurée.

Weierstrass montra les difficultés que soulevait la question et, après ses critiques, l'effort se porta sur la solution du *problème* de Dirichlet.

On suivit des voies qui n'ont aucun rapport avec le Calcul des

variations : méthode de Neumann, qui fut perfectionnée par plusieurs auteurs et étendue à beaucoup d'autres cas; méthodes de Schwarz; méthode du balayage de Henri Poincaré; enfin les procédés fondés sur les équations intégrales, employés d'abord par Fredholm. Ces derniers procédés ont donné lieu à un grand nombre de travaux et ils ont été d'une grande fécondité.

Puis un courant se forma pour revenir à l'étude des vieux concepts et s'appuyer sur le *principe* de Dirichlet. Arzelà fut l'initiateur et, directement inspiré par les idées sur les fonctionnelles, chercha à donner une démonstration rigoureuse de l'existence du minimum sous certaines conditions. Ses travaux définitifs remontent à 1897 (1) bien que ses vues et ses études soient plus anciennes.

En 1900, Hilbert (2) donna une démonstration complète et rigoureuse, obtenant un résultat définitif que n'avait pas atteint Arzelà. Mais c'est en suivant la voie frayée par celui-ci que Hilbert pu réussir. De nombreux travaux de B. Levi, Fubini, Lebesgue, Zaremba et d'autres vinrent après celui de Hilbert.

5. Mais la généralité de la méthode n'apparut qu'après que l'on se fut aperçu que la réussite des procédés employés était due à la propriété de l'intégrale J de posséder la *semi-continuité* (*cf.*, Chap. II, n° 16).

Ce fut M. Tonelli qui, usant systématiquement de l'analyse fonctionnelle, mit à la base de l'étude directe des problèmes de maximum et minimum le concept de *semi-continuité* et est ainsi le véritable fondateur des méthodes nouvelles (3).

Pour en donner une idée nette, il suffira de se limiter ici au cas le plus simple, celui de l'intégrale

$$\int_a^b f\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx.$$

Ce cas sera envisagé dans le paragraphe suivant que M. Tonelli a bien voulu écrire à l'intention du présent Ouvrage. Les Auteurs sont heureux de lui exprimer ici leurs vifs remerciements.

(1) ARZELÀ, [3].

(2) HILBERT, [66].

(3) On en trouve un exposé d'ensemble dans le traité de M. Tonelli [101].

II. — MÉTHODE DIRECTE POUR L'ÉTUDE DU MAXIMUM OU DU MINIMUM D'UNE INTÉGRALE SIMPLE.

6. **Généralités.** — Nous nous limiterons, dans ce qui suit, à la considération du problème de minimum pour l'intégrale

$$\int_a^b f\big(x, y(x), y'(x)\big)\, dx. \tag{1}$$

Pour simplifier nous prendrons un champ A formé par tous les points du plan (x, y) satisfaisant à la condition

$$a_* \leqq x \leqq b_*$$

avec $a_* < b_*$ et une fonction $f(x, y, y')$ finie et continue, ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres pour tous les points (x, y) du champ A et pour toutes les valeurs finies de y'.

Nous désignerons par $\mathcal{C}$ l'ensemble (ou classe) de toutes les fonctions absolument continues [1] $y(x)$ définies chacune sur un intervalle propre (a, b) avec $a_* \leqq a \leqq b \leqq b_*$ et telles que $f\big(x, y(x), y'(x)\big)$ soit intégrable au sens de Lebesgue dans l'intervalle (a, b). Appelant C la courbe

$$y = y(x) \qquad a \leqq x \leqq b$$

---

[1] La notion de fonction absolument continue a été introduite par Vitali. Rappelons la définition. Une fonction $f(x)$ définie pour $a \leqq x \leqq b$ sera dite *absolument continue* si, à tout ε positif on peut associer un nombre δ également positif et tel que, (a_i, b_i) $(i = 1, 2, \ldots, m)$ étant un groupe *quelconque* d'intervalles de (a, b), en nombre fini, sans parties communes et vérifiant l'inégalité

$$\sum_1^m |b_i - a_i| < \delta,$$

on ait

$$\sum |f(b_i) - f(a_i)| < \varepsilon.$$

En particulier une fonction pour laquelle le rapport des accroissements $\frac{\Delta f}{\Delta x}$ est borné est absolument continue.

On vérifie de suite, à partir de la définition, qu'une fonction absolument continue est à variation bornée. En désignant alors par $V(x)$ la variation totale de $f(x)$ dans l'intervalle (a, x), pour que $f(x)$ soit absolument continue, il est nécessaire et suffisant que $V(x)$ le soit.

qui représente géométriquement la fonction $y(x)$ de la classe $\mathcal{C}$, nous désignerons par la même lettre $\mathcal{C}$ la classe de toutes les courbes C.

Nous nous servirons dans la suite de la notion de *voisinage élémentaire* d'ordre zéro (*cf.* Chap. II, nº 19) avec un léger complément venant de ce que les diverses fonctions considérées n'ont pas forcément le même intervalle de définition. Étant donnée une courbe C_0 de la classe $\mathcal{C}$

$$C_0 : \qquad y = y_0(x), \qquad a_0 \leqq x \leqq b_0,$$

nous dirons qu'une autre courbe de la même classe

$$C : \qquad y = y(x), \qquad a \leqq x \leqq b$$

appartient proprement au *voisinage* (ρ) de C_0 (avec $\rho > 0$) si :

1° $|a_0 - a| \leqq \rho$, $|b_0 - b| \leqq \rho$;

2° $|y_0(x) - y(x)| \leqq \rho$ pour tout x commun aux deux intervalles (a_0, b_0) et (a, b);

3° $|y_0(a_0) - y(x)| \leqq \rho$ pour toute valeur de x appartenant à (a, b) et qui serait, éventuellement, inférieure à a_0;

4° $|y_0(b_0) - y(x)| \leqq \rho$ pour tout x appartenant à (a, b) et qui serait supérieur à b_0.

7. **L'intégrale** $I[C]$. — Soit une courbe $C : y = y(x)$, $a \leqq x \leqq b$, de la classe $\mathcal{C}$; nous désignerons par $I[C]$ l'intégrale (1) correspondante : c'est une fonctionnelle qui, du point de vue géométrique, est fonction de la ligne C.

Cette intégrale sera dite *régulière positive* (*négative*) si, pour tous les points (x, y) de A et pour toutes les valeurs finies de y', on a constamment

$$(2) \qquad f_{y'y'}(x, y, y') > 0 \qquad (< 0) \quad (^1);$$

elle sera dite, par contre, *quasi régulière positive* (*négative*) si, pour les mêmes x, y et y', on a

$$(2') \qquad f_{y'y'}(x, y, y') \geqq 0 \qquad (\leqq 0).$$

---

(1) $f_{y'y'}$ désigne la dérivée seconde de f prise deux fois par rapport à la variable y'; de même plus loin $f_{y'}$, $f_{y'x}$ sont des dérivées partielles par rapport aux variables mises en indice.

8. Semi-continuité et continuité. — Soit $\mathcal{C}^*$ une classe de courbes appartenant à $\mathcal{C}$. D'après les définitions du Chapitre II, l'intégrale I[C] sera, dans $\mathcal{C}^*$, *semi-continue inférieurement* (*supérieurement*) sur la courbe C_0 de $\mathcal{C}^*$ si, $\varepsilon > 0$ étant pris arbitrairement, on peut lui associer un nombre $\rho > 0$ tel que

$$I[C] > I[C_0] - \varepsilon \qquad (I[C] < I[C_0] + \varepsilon)$$

pour toutes les courbes C de $\mathcal{C}^*$ qui appartiennent proprement au voisinage (ρ) de C_0.

Si I[C] est, dans $\mathcal{C}^*$, *semi-continue inférieurement* (*supérieurement*) sur toute courbe de la classe, on dira qu'elle est *semi-continue inférieurement* (*supérieurement*) dans $\mathcal{C}^*$; et si $\mathcal{C}^*$ coïncide avec $\mathcal{C}$, on dira, sans plus, que I[C] est *semi-continue inférieurement* (*supérieurement*).

Comme il a déjà été dit la *continuité* (sur la courbe C_0, ou dans $\mathcal{C}^*$, ou dans $\mathcal{C}$) résultera de la coexistence des deux semi-continuités inférieure et supérieure.

Supposons maintenant que, dans $\mathcal{C}^*$, l'intégrale I[C] admette un minimum : cela revient à dire qu'il existe une courbe C_0 de $\mathcal{C}^*$ telle que

$$I[C_0] \leqq I[C]$$

pour toutes les courbes C de $\mathcal{C}^*$. Dans ces conditions I[C] est, dans $\mathcal{C}^*$, semi-continue inférieurement sur C_0. L'existence d'un maximum entraîne de même la semi-continuité supérieure de l'intégrale. Cela nous conduit à rechercher les conditions de semi-continuité de I[C].

9. Condition nécessaire de semi-continuité. — *Afin que, pour une courbe quelconque* C_0 *de* $\mathcal{C}$, *l'intégrale* I[C] *soit sur* C_0 *semi-continue inférieurement dans la classe* $\mathcal{C}_0$ *de toutes les courbes de* $\mathcal{C}$ *qui réunissent les points extrêmes de* C_0, *il est nécessaire que* I[C] *soit quasi régulière positive.*

A cause de la continuité de $f_{y'y'}$, il suffira de démontrer (2′) pour les points x, y intérieurs au champ A.

Supposons, s'il est possible, qu'en un point $P_0(x_0, y_0)$ intérieur à A, on ait, pour une valeur y'_0,

$$f_{y'y'}(x_0, y_0, y'_0) < 0. \tag{3}$$

On pourrait alors choisir deux nombres η et δ, supérieurs à zéro, tels que le segment rectiligne P_0P_1 issu de P_0 avec le coefficient angulaire y'_0 et la longueur δ, soit intérieur à A et tel que, en chacun de ses points et pour tous les y' compris entre $y'_0 - \delta$ et $y'_0 + \delta$, on ait

$$(4) \qquad f_{y'y'}(x, y, y') < -\eta.$$

Désignons alors par C_0 la courbe formée par ce segment (P_0P_1), dont l'équation est

$$y = y_0(x) = y_0 + y'_0(x - x_0) \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_1),$$

en désignant par x_1 l'abscisse de P_1. Construisons, pour chaque n entier positif, la courbe C_n

$$y = y_n(x) \qquad (x_0 \leqq x \leqq x_1)$$

de la façon suivante : nous divisons P_0P_1 en n parties égales et, sur chacune d'elles prise comme base, nous construisons un triangle qui

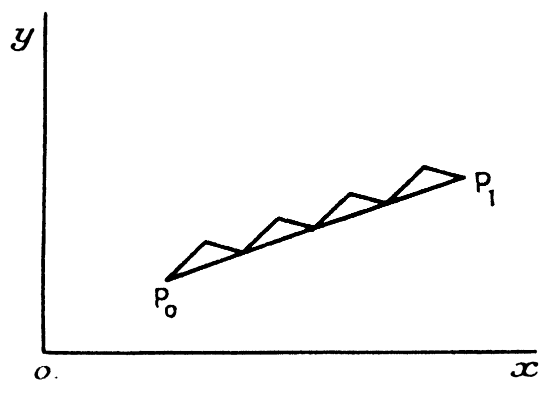


Fig. 3.

ait ses deux autres côtés de coefficients angulaires $y'_0 + \delta$, $y'_0 - \delta$. Tous ces nouveaux côtés formeront une ligne brisée, qui sera la courbe C_n et qui a les mêmes extrémités P_0 et P_1 que C_0.

Si n tend vers l'infini, C_n tend uniformément, dans tout (x_0, x_1) vers C_0 et par suite C_n appartient proprement, à partir d'une certaine valeur de n, à un voisinage (ρ) de la courbe C_0.

Observons enfin que, dans tout (x_0, x_1), on a

$$(5) \qquad y'_0(x) = y'_0, \qquad y'_n(x) = y'_0 \pm \delta$$

et que C_n appartient à la classe $\mathcal{C}_0$.

Évaluons alors la différence $I[C_n] - I[C_0]$. Ajoutant et retranchant l'intégrale de $f\big(x, y_0(x), y'_n(x)\big)$ et appliquant le développement limité de Taylor, nous avons

$$(6)\quad \begin{aligned} I[C_n] - I[C_0] &= \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_n, y'_n)\,dx - \int_{x_0}^{x_1} f(x, y_0, y'_0)\,dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} \big(f(x, y_n, y'_n) - f(x, y_0, y'_n)\big)\,dx \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1} (y'_n - y'_0) f_{y'}(x, y_0, y'_0)\,dx \\ &\quad + \frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y'_n - y'_0)^2 f_{y'y'}(x, y_0, \overline{y}')\,dx, \end{aligned}$$

où $\overline{y}'$, variable avec x, est compris entre y'_0 et $y'_0 \pm \delta = y'_n$.

Si n tend vers l'infini, la première intégrale du dernier membre de (6) tend vers zéro et la seconde, qui peut s'écrire, en intégrant par parties

$$\begin{aligned} &\int_{x_0}^{x_1} (y'_n - y'_0) f_{y'}(x, y_0, y'_0)\,dx \\ &= -\int_{x_0}^{x_1} (y_n - y_0)\big\{ f_{y'x}(x, y_0, y'_0) + y'_0 f_{y'y}(x, y_0, y'_0) \big\}\,dx \end{aligned}$$

tend aussi vers zéro. D'après les précédentes (4) et (5) on a d'ailleurs

$$\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x_1} (y'_n - y'_0)^2 f_{y'y'}(x, y_0, \overline{y}')\,dx < -\frac{\delta^2}{2}(x_1 - x_0)\eta,$$

d'où enfin

$$(7)\qquad I[C_n] - I[C_0] < -\frac{\delta^2}{4}(x_1 - x_0)\eta,$$

pour toutes les valeurs de n supérieures à un certain entier n_0. Ceci contredit la semi-continuité inférieure de $I[C]$ sur C_0 dans la classe $\mathcal{C}_0$, puisqu'alors, pour des valeurs assez grandes de n on devrait avoir l'inégalité contraire à (7). Le théorème énoncé est ainsi établi.

Comme corollaire nous avons :

une condition nécessaire pour la semi-continuité inférieure de $I[C]$ *est que cette intégrale soit quasi régulière positive.*

Il est évident que, en substituant la quasi-régularité négative à la

quasi-régularité positive, on aura une condition nécessaire pour la semi-continuité supérieure.

10. Condition pour la continuité. — Comme, d'une part, la continuité résulte de la présence des deux semi-continuités et que, d'autre part, les deux inégalités

$$f_{y'y'}(x, y, y') \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad f_{y'y'}(x, y, y') \leqq 0$$

donnent

$$f_{y'y'}(x, y, y') = 0$$

et, par suite,

$$f(x, y') \equiv M(x, y) + N(x, y)y',$$

les résultats du numéro précédent entraînent donc que

Une condition nécessaire pour que I[C] *soit continue est qu'elle ait la forme simple*

$$(8) \qquad \int_a^b \{ M(x, y) + y' N(x, y) \} \, dx.$$

On voit bien ici la nécessité de faire intervenir dans le calcul des variations la semi-continuité et non pas la continuité : si l'on voulait n'envisager que des intégrales possédant la continuité fonctionnelle, on serait réduit au seul type très particulier (8).

La condition précédente reste nécessaire même si l'on se borne à demander, pour toute courbe C_0 de $\mathcal{C}$, la continuité de I[C] par rapport aux seules courbes qui ont les mêmes extrémités que C_0.

D'ailleurs la condition susdite *est aussi suffisante pour la continuité de* I[C].

Supposons en effet que I[C] ait la forme (8) et soit une courbe

$$C_0 : \qquad y = y_0(x), \qquad a_0 \leqq x \leqq b_0$$

de la classe $\mathcal{C}$. Si

$$C : \qquad y = y(x), \qquad a_0 \leqq x \leqq b_0$$

est une courbe quelconque de $\mathcal{C}$ ayant, sur l'axe des x, la même projection orthogonale que C_0, on aura

$$(9) \quad I[C] - I[C_0] = \int_{a_0}^{b_0} \{ M\big(x, y(x)\big) - M\big(x, y_0(x)\big) \} \, dx + \int_{a_0}^{b_0} \{ N\big(x, y(x)\big) y'(x) - N\big(x, y_0(x)\big) y'_0(x) \} \, dx.$$

$\varepsilon > 0$ étant pris arbitrairement, il est possible de déterminer $\rho > 0$ tel que, si C appartient proprement au voisinage (ρ) de C_0, la première intégrale au second membre de (9) soit, en module, moindre que ε. Quant à la dernière intégrale, elle donne, par la formule de Green

$$\int_C N(x, y)\,dy - \int_{C_0} N(x, y)\,dy$$
$$= -\int_{a_0}^{b_0} dx \int_{y_0(x)}^{y(x)} \frac{\partial N}{\partial x}\,dy - \left\{ \int_{y_0(a_0)}^{y(a_0)} N(a_0, y)\,dy - \int_{y_0(b_0)}^{y(b_0)} N(b_0, y)\,dy \right\},$$

qui peut aussi être rendu inférieur à ε pour ρ assez petit. On a donc, dans ces conditions,

$$|\,I[C] - I[C_0]\,| < 2\varepsilon$$

pour toutes les C de $\mathcal{C}$ appartenant au voisinage (ρ) de C_0 et ayant sur l'axe Ox, la même projection orthogonale que C_0. Ceci prouve la continuité de I[C] sur la courbe C_0 relativement à la classe des courbes C ainsi définies.

La continuité de I[C] sur C_0, relativement à toute la classe $\mathcal{C}$ s'obtient enfin en substituant à C_0 la courbe C'_0 qui s'obtient en lui ajoutant les segments rectilignes

$$y = y_0(a_0), \qquad a_* \leq x \leq a_0$$

et

$$y = y_0(b_0), \qquad b_0 \leq x \leq b_*$$

en opérant de même pour toutes les C et appliquant le résultat précédent ([1]).

11. Condition suffisante pour la semi-continuité. — *L'intégrale* I[C], *si elle est quasi régulière positive, est semi-continue inférieurement.*

([1]) Pour les intégrales sous forme paramétrique $\int_C F(x, y, x', y')\,ds$, la forme analogue à (8)

(8') $$\int_C \left\{ M(x, y)x' + N(x, y)y' \right\} ds$$

est nécessaire, mais non suffisante pour la continuité. Dans ce cas la condition nécessaire et suffisante est donnée par la forme (8') avec la condition $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ dans tout A, ce qui revient à dire que $M\,dx + N\,dy$ est différentielle exacte dans tout A.

Pour exposer rapidement le principe de la démonstration, nous supposerons que la courbe

$$C_0: \qquad y = y_0(x), \qquad a_0 \leqq x \leqq b_0$$

sur laquelle il s'agit de prouver la semi-continuité, admette, pour $y_0(x)$, les dérivées $y'_0(x)$ et $y''_0(x)$ finies et continues ([1]).

Un artifice analogue à celui utilisé au numéro précédent nous permet de nous borner à considérer les seules courbes C de la classe $\mathcal{C}$ ayant, sur l'axe des x, la même projection $a_0 b_0$ que C_0. Posant toujours

$$C: \qquad y = y(x), \qquad a_0 \leqq x \leqq b_0,$$

nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} I[C] - I[C_0] &= \int_{a_0}^{b_0} f\big(x, y(x), y'(x)\big)\,dx - \int_{a_0}^{b_0} f\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big)\,dx \\ &= \int_{a_0}^{b_0} \Big(f\big(x, y(x), y'(x)\big) - f\big(x, y(x), y'_0(x)\big) \\ &\qquad\qquad + f\big(x, y(x), y'_0(x)\big)\Big)\,dx \\ &\quad - \int_{a_0}^{b_0} f\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big)\,dx. \end{aligned}$$

Mais le développement de Taylor

$$\begin{aligned} &f(x, y, y') - f(x, y, y'_0) \\ &\quad = (y' - y'_0) f_{y'}(x, y, y'_0) + \frac{1}{2}(y' - y'_0)^2 f_{y'y'}(x, y, \bar{y}'), \end{aligned}$$

où $f_{y'y'}$ est toujours $\geqq 0$, donne

$$f(x, y, y') - f(x, y, y'_0) \geqq (y' - y'_0) f_{y'}(x, y, y'),$$

d'où

$$\begin{aligned} (10)\quad & I[C] - I[C_0] \\ &\geqq \int_{a_0}^{b_0} \Big\{ f\big(x, y, y'_0(x)\big) + \big(y'(x) - y'_0(x)\big) f_{y'}\big(x, y, y'_0(x)\big) \Big\}\,dx \\ &\quad - \int_{a_0}^{b_0} f\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big)\,dx. \end{aligned}$$

([1]) On trouvera dans le traité de M. Tonelli ([101], vol. I, chap. XI) la démonstration générale, indépendante des hypothèses particulières admises ici.

Or, d'après le n° 10, l'intégrale

$$\int_{a_0}^{b_0}\left\{f\big(x, y, y'_0(x)\big)-y'_0(x)f_{y'}\big(x, y, y'_0(x)\big)+y' f_{y'}\big(x, y, y'_0(x)\big)\right\} dx,$$

qui figure au second membre de l'inégalité précédente, une fois pour la courbe C $\big($c'est-à-dire en prenant $y=y(x)\big)$ et une fois pour la courbe C_0 $\big(y=y_0(x)\big)$, est continue. On pourra donc déterminer un ρ de façon que, si C appartient proprement au voisinage (ρ) de C_0, le second membre de (10) soit en module moindre de ε et, par suite,

$$I[C]-I[C_0]>-\varepsilon.$$

La semi-continuité inférieure de $I[C]$ sur C_0 est ainsi établie.

En particulier *toutes les intégrales* $I[C]$ *régulières positives sont semi-continues inférieurement.*

Le simple changement de $f(x, y, y')$ en $-f(x, y, y')$ montre que $I[C]$ est semi-continue supérieurement si elle est quasi régulière négative.

12. Extension de la semi-continuité. — Supposons l'intégrale I quasi régulière positive et considérons une fonction quelconque absolument continue $\varphi(x)$ définie dans un intervalle (a, b) avec $a_* \leqq a \leqq b \leqq b_*$. Nous admettrons que cette fonction n'appartient pas à la classe $\mathcal{C}$ de sorte que la fonction $f\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)$ n'est pas intégrable, au sens de Lebesgue, sur (a, b). R étant un nombre positif quelconque, soit E_R l'ensemble des points de (a, b) sur lesquels $|\varphi'(x)|<R$; la fonction $f\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)$ étant bornée sur E_R est intégrable sur cet ensemble et les hypothèses faites entraînent que

$$(11)\qquad \lim_{R=\infty}\int_{E_R} f\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)\, dx=+\infty.$$

Posons en effet

$$(12)\qquad \bar{f}(x, y, y')=f(x, y, y')-\left\{f(x, y, 0)+y' f_{y'}(x, y, 0)\right\};$$

la condition $f_{y'y'}(x, y, y')\geqq 0$ et le développement

$$f(x, y, y')=f(x, y, 0)+y' f_{y'}(x, y, 0)+\frac{1}{2}y'^2 f_{y'y'}(x, y, y')$$

entraînent $\bar{f}(x, y, y') \geqq 0$. En outre $\varphi(x)$ étant absolument continue sur (a, b), $\varphi'(x)$ est intégrable dans cet intervalle au sens de Lebesgue et par suite aussi

$$f\big(x, \varphi(x), 0\big) + \varphi'(x) f_{y'}\big(x, \varphi(x), 0\big). \tag{13}$$

L'hypothèse que $f\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)$ n'est pas intégrable entraîne alors que $\bar{f}\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)$ ne l'est pas non plus et, puisque $\bar{f} \geqq 0$,

$$\lim_{R=\infty} \int_{E_R} \bar{f}\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)\, dx = +\infty; \tag{14}$$

(11) en résulte à cause de (12) et de l'intégrabilité de (13).

La formule (14) conduit à poser

$$\int_a^b \bar{f}\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)\, dx = +\infty$$

et aussi

$$\int_a^b f\big(x, \varphi(x), \varphi'(x)\big)\, dx = +\infty. \tag{15}$$

Or la démonstration générale du théorème du n° **11** sur la semi-continuité des intégrales quasi régulières positives — démonstration pour laquelle nous renvoyons au *Fondamenti* de Tonelli — prouve également que, étant choisi arbitrairement un nombre K, on peut toujours trouver un nombre $\rho > 0$ de façon que toute courbe C de la classe $\mathcal{C}$ appartenant proprement au voisinage (ρ) de $y = \varphi(x)$, $a \leqq x \leqq b$ donne

$$I[C] > K.$$

Cette propriété, pour le cas où l'on a la formule (15), donne une extension de la semi-continuité inférieure. On peut l'énoncer en disant que l'intégrale quasi régulière positive $I[C]$ est semi-continue inférieurement même sur la courbe $y = \varphi(x)$, $a \leqq x \leqq b$, pour laquelle elle prend la valeur infinie.

13. Existence du minimum. — Indiquons maintenant comment on peut profiter de la semi-continuité inférieure pour établir l'existence du minimum [1]. Démontrons à cet effet le théorème suivant :

---

[1] Des considérations analogues valent pour l'existence du maximum dans le cas de la semi-continuité supérieure.

Soit I[C] *une intégrale quasi régulière positive et admettons qu'il existe trois nombres* $\alpha > 0$, $\mu > 0$, ν *tels que*

$$f(x, y, y') \geqq \mu |y'|^{1+\alpha} + \nu \tag{16}$$

pour tous les points (x, y) *du champ* A *et pour tous les* y' *finis. Alors dans la classe* $\mathcal{C}_0$ *de toutes les courbes de* $\mathcal{C}$ *qui joignent deux points donnés* $P \equiv (a, p)$, $Q \equiv (b, q)$ *de* A, *avec* $a_* \leqq a < b \leqq b_*$, *il en existe une qui réalise le minimum (absolu) de* I[C].

(16) entraîne, pour toute courbe C de $\mathcal{C}_0$,

$$I[C] = \int_a^b f(x, y, y')\,dx \geqq \nu(b-a)$$

et la limite inférieure i de I[C] sur $\mathcal{C}_0$ est certainement finie (supérieure ou égale à $\nu(b-a)$). Soit alors une suite de courbes de $\mathcal{C}_0$ (suite minimisante)

$$C_1, \quad C_2, \quad \ldots, \quad C_n, \quad \ldots,$$

telles que

$$I[C_n] \leqq i + \frac{1}{n} \tag{17}$$

et désignons par $y = y_n(x)$, $a \leqq x \leqq b$, l'équation de C_n. Nous aurons, d'après (16),

$$I[C_n] \geqq \mu \int_a^b |y'_n|^{1+\alpha}\,dx + \nu(b-a)$$

et, par suite,

$$\int_a^b |y'_n|^{1+\alpha}\,dx \leqq \frac{1}{\mu}\left\{ i + \frac{1}{n} + |\nu|(b-a)\right\} \leqq H, \tag{18}$$

où

$$H = \frac{1}{\mu}\{ i + 1 + |\nu|(b-a)\}$$

ne dépend pas de n.

Le pas essentiel consiste maintenant à établir que la suite des $y_n(x)$ forme un ensemble de fonctions également continues et également bornées. D'après le théorème de Ascoli-Arzelà (Chap. II, nº **8**, ***b***), on pourra alors en tirer une suite uniformément convergente qui a bien des chances de réaliser le minimum cherché.

Or envisageons un groupe quelconque d'intervalles partiels de (a, b), soit (a_1, b_1), (a_2, b_2), $\ldots$, (a_m, b_m), intervalles en nombre fini et

non empiétants. Formons la somme

$$\sum_{1}^{m}{}_r \,|\, y_n(b_r) - y_n(a_r) \,|\, \leqq \sum_{1}^{m}{}_r \int_{a_r}^{b_r} |\, y'_n \,|\, dx$$

et appliquons l'inégalité connue de Schwarz-Hölder [1], il vient

$$\begin{aligned} &\sum_{1}^{m}{}_r \,|\, y_n(b_r) - y_n(a_r) \,| \\ &\leqq \sum_{1}^{m}{}_r \int_{a_r}^{b_r} |\, y'_n \,|\, dx \\ &\leqq \left[\sum_{1}^{m}{}_r \int_{a_r}^{b_r} |\, y'_n \,|^{1+\alpha}\, dx \right]^{\frac{1}{1+\alpha}} \left(\sum_{1}^{m}{}_r (b_r - a_r) \right)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}, \end{aligned}$$

d'où, d'après (18),

$$\sum_{1}^{m}{}_r \,|\, y_n(b_r) - y_n(a_r) \,|\, \leqq \mathrm{H}^{\frac{1}{1+\alpha}} \left\{ \sum_{1}^{m} (b_r - a_r) \right\}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}. \tag{19}$$

Si nous prenons $r = 1$ nous voyons que, pour tout intervalle (a_1, b_1) contenu dans (a, b) et quelque soit n

$$|\, y_n(b_1) - y_n(a_1) \,|\, < \mathrm{H}^{\frac{1}{1+\alpha}} (b_1 - a_1)^{\frac{\alpha}{1+\alpha}},$$

ce qui prouve bien que les $y_n(x)$ sont également continues dans (a, b); $y_n(a)$ étant toujours égale à p ces fonctions sont aussi également bornées dans (a, b). On peut donc appliquer le théorème, rappelé plus haut, de Ascoli-Arzelà et extraire de la suite des $y_n(x)$ une suite $y_{n_1}(x)$, $y_{n_2}(x)$, ..., convergeant uniformément, dans tout (a, b), vers une fonction continue $y_\infty(x)$.

Les dernières vérifications sont fort simples. On aura évidemment

$$y_\infty(a) = p, \qquad y_\infty(b) = q, \tag{20}$$

et, d'après les (19) appliquées aux $y_{n_i}(x)$ et en passant à la limite

---

[1] *Cf.* [101], vol. I, p. 165.

pour $s = \infty$,

$$\sum_{r}^{m} |y_{\infty}(b_r) - y_{\infty}(a_r)| \leq H^{\frac{1}{1+\alpha}} \left\{ \sum_{r}^{m} (b_r - a_r) \right\}^{\frac{\alpha}{1+\alpha}}$$

inégalité qui prouve que $y_{\infty}(x)$ est absolument continue dans (a, b).

Si la courbe

$$(21) \qquad y = y_{\infty}(x), \qquad a \leq x \leq b$$

n'appartenait pas à la classe $\mathcal{C}$, d'après le résultat du nº **12** toutes les courbes C de $\mathcal{C}$ appartenant proprement à un voisinage (ρ), assez petit, de la courbe (21) devraient donner à l'intégrale I une valeur plus grande que $i + 1$. En particulier on aurait

$$I[C_{n_s}] > i + 1$$

pour s assez grand, ce qui serait contradictoire à (17). Il est donc certain que la courbe (21), que nous désignerons par C_{∞}, appartient à la classe $\mathcal{C}$ et donc aussi, d'après (20), à $\mathcal{C}_0$.

Utilisons enfin la semi-continuité inférieure de I[C], semi-continuité qui est assurée par le théorème du nº **11** puisque, par hypothèse, notre intégrale est quasi régulière positive. De (17) suit

$$\lim_{s=\infty} I[C_{n_s}] = i$$

et, par la semi-continuité inférieure de I[C], on doit avoir

$$\lim_{s=\infty} I[C_{n_s}] \geq I[C_{\infty}],$$

d'où $i \geq I[C_{\infty}]$; mais puisque i est la limite inférieure de I[C] dans la classe $\mathcal{C}_0$, il vient

$$i = I[C_{\infty}].$$

La courbe C_{∞} donne bien le minimum absolu.

D'autres théorèmes d'existence, plus généraux, se trouvent dans le Traité de L. Tonelli (vol. II). Ici nous observerons que, dans la proposition démontrée, au lieu du minimum de I[C] dans la classe $\mathcal{C}_0$ de toutes les courbes de $\mathcal{C}$ qui unissent les points P et Q, on pourrait considérer le minimum dans des classes bien plus générales.

En maintenant, par exemple, la condition que les courbes considérées appartiennent à $\mathcal{C}$ et ont toutes les points extrêmes P et Q, il

suffit d'ajouter une condition qui assure que $\mathcal{C}_\infty$ fait partie des courbes pour lesquelles on cherche le minimum.

En particulier, on pourra remplacer $\mathcal{C}_0$ par $\mathcal{C}_1$ formé par toutes les courbes de $\mathcal{C}_0$ pour lesquelles la nouvelle intégrale

$$\int_a^b \{ M(x, y) + y' N(x, y) \} \, dx$$

prend une valeur constante.

14. L'équation d'Euler. — Soit $C_0 : y_0(x)\ a \leqq x \leqq b$ une courbe de $\mathcal{C}_0$ qui rend minimum $I[C]$ dans $\mathcal{C}_0$. Nous avons démontré son existence dans des conditions précises. Nous allons constater que $y_0(x)$ n'est pas seulement absolument continue, mais jouit d'autres propriétés notables. On a en effet le théorème suivant :

Si $I[C]$ *est régulière positive et si, dans toute région bornée du champ* A, *il existe des constantes* α, μ, ν, μ_1, ν_1, *avec* $\alpha > 0$, $\mu > 0$, $\mu_1 > 0$, *de manière que, en tous les points de la région considérée et pour* y' *quelconque, on ait*

$$(22) \qquad \begin{cases} \mu_1 |y'|^{1+\alpha} + \nu_1 \leqq f(x, y, y') \leqq \mu |y'|^{1+\alpha} + \nu, \\ |f_y(x, y, y')| < \mu |y'|^{1+\alpha} + \nu, \\ |f_{y'}(x, y, y')| < \mu |y'|^{1+\alpha} + \nu, \end{cases}$$

la fonction $y_0(x)$ *précédente a partout des dérivées* $y'_0(x)$ *et* $y''_0(x)$ *finies et continues et satisfait à l'équation d'Euler*

$$(23) \qquad f_y - \frac{d}{dx} f_{y'} = 0.$$

Observons d'abord que la première des (22) entraîne

$$(24) \qquad \int_a^b |y'_0|^{1+\alpha} \, dx \leqq \frac{1}{\mu_1} \{ I(C_0) - \nu_1 (b - a) \},$$

de sorte que la seconde et la troisième des (22) assurent que

$$f_y\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big) \quad \text{et} \quad f_{y'}\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big)$$

sont intégrables sur (a, b).

Notons aussi que si $\varphi(x)$ est une fonction continue dans (a, b) et si

le rapport des accroissements $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}$ est borné [1], de l'inégalité

$$(25)\qquad |y'_0+\varphi'|^{1+\alpha}\leqq(|y'_0|+|\varphi'|)^{1+\alpha}\leqq 2^{1+\alpha}(|y'_0|^{1+\alpha}+|\varphi'|^{1+\alpha})$$

résulte, à cause de (24), l'intégrabilité sur (a, b) de $|y'_0+\varphi'|^{1+\alpha}$ et donc, d'après la première des (22), celle de

$$f\big(x, y_0(x)+\varphi(x), y'_0(x)+\varphi'(x)\big).$$

Ceci posé soit $\omega(x)$ une fonction continue et ayant un rapport incrémental $\frac{\Delta\omega}{\Delta x}$ borné sur (a, b), telle que $\omega(a)=\omega(b)=0$ et considérons

$$y_t(x)=y_0(x)+t\,\omega(x),$$

où t est un nombre réel quelconque. A cause des remarques faites, il est clair que la courbe correspondante C_t appartient à $\mathcal{C}_0$.

Nous avons

$$(26)\quad \frac{1}{t}\big(\mathrm{I}[C_t]-\mathrm{I}[C_0]\big)=\int_a^b\Big\{\omega\, f_y(x, y_0+t\theta\omega, y'_0+t\theta\omega') \\ +\omega' f_{y'}(x, y_0+t\theta\omega, y'_0+t\theta\omega')\Big\}\,dx.$$

Lorsque t tend vers zéro, f_y et $f_{y'}$ qui figurent sous le signe d'intégration, tendent presque partout vers $f_y(x, y_0, y'_0)$ et $f_{y'}(x, y_0, y'_0)$ respectivement et comme, d'après (25), on a, lorsque $|t|\leqq 1$,

$$|y'_0+t\theta\omega'|^{1+\alpha}\leqq 2^{1+\alpha}(|y'_0|^{1+\alpha}+|\omega'|^{1+\alpha}),$$

l'intégrale, sur (a, b), de $|y'_0+t\theta\omega'|$ est, pour tous les t inférieurs à un en module, également absolument continue et telles sont aussi, d'après (22), les intégrales de $f_y(x, y_0+\theta t\omega, y'_0+\theta t\omega')$ et de $f_{y'}(x, y_0+\theta t\omega, y'_0+\theta t\omega')$.

D'après un théorème connu sur l'intégration des séries, dû à Vitali [2], la limite de l'intégrale au second membre de (26) est, alors, égale à l'intégrale de la limite de la fonction sous signe d'intégration; (26) entraîne donc

$$\lim_{t=0}\frac{1}{t}\big\{\mathrm{I}[C_t]-\mathrm{I}[C_0]\big\}=\int_a^b\big\{\omega f_y(x, y_0, y'_0)+\omega' f_{y'}(x, y_0, y'_0)\big\}\,dx.$$

---

(1) $\varphi(x)$ est donc absolument continue; *cf.* note de la page 111.

(2) *Cf.* d'ailleurs [101], tome II, p. 91.

Puisque C_0 est une courbe qui donne le minimum de $I[C]$, il vient

$$\int_a^b \{\omega f_y(x, y_0, y'_0) + \omega' f_{y'}(x, y_0, y'_0)\} dx = 0,$$

d'où, par une intégration par partie,

$$\int_a^b \omega' \left\{ \int_a^x f_y(x, y_0, y'_0) dx - f_{y'}(x, y_0, y'_0) \right\} dx = 0.$$

Cette inégalité ayant lieu quelle que soit la fonction $\omega(x)$ du type indiqué entraîne, d'après une remarque classique de P. du Bois Reymond [21],

$$\int_a^x f_y(x, y_0, y'_0) dx - f_{y'}(x, y_0, y'_0) = C \tag{27}$$

presque partout, sur (a, b), C étant une constante.

De (27) nous tirons toutes les propriétés de $y_0(x)$ indiquées dans l'énoncé du théorème.

$y_0(x)$ étant absolument continue dans (a, b) y admet, presque partout, une dérivée $y'_0(x)$ finie. Indiquons par E l'ensemble de tous les points de (a, b) pour lesquels existe cette dérivée finie et pour lesquels (27) est satisfaite. La mesure de E est égale à $(b - a)$. Soit alors $\overline{x}$ un point de (a, b) n'appartenant pas à E et soit un point x de E qui tend vers $\overline{x}$, il est clair que la limite de $f_{y'}(x, y_0(x) y'_0(x))$ existe et est finie.

Comme $I[C]$ est une intégrale régulière, ce qui revient à dire que $f_{y'y'}(x, y, y') > 0$, la fonction $f_{y'}(x, y, y')$ est fonction croissante de y'. Dans ces conditions l'existence de la limite de

$$f_{y'}\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big)$$

pour x tendant vers $\overline{x}$ sur E entraîne l'existence de la limite correspondante de $y'_0(x)$ que nous désignerons par $y^*(\overline{x})$ et entraîne de plus que la limite de

$$f_{y'}\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big) \quad \text{est} \quad f_{y'}\big(\overline{x}, y_0(\overline{x}), y^*(\overline{x})\big) \qquad \text{si } y^*(\overline{x}) \text{ est finie.}$$

Mais, x étant un point de E, nous avons

$$f\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big) = f\big(x, y_0(x), 0\big) + y'_0(x) f_{y'}\big(x, y_0(x), \tilde{y}'(x)\big),$$

où $\bar{y}'(x)$ est une valeur comprise entre o et $y'_0(x)$ et par suite, d'après la première des (22),

$$y'_0 f_{y'}(x, y_0, \bar{y}') = f(x, y_0, y'_0) - f(x, y_0, 0) \geqq \mu_1 |y'_0|^{1+\alpha} + \nu_1 - f(x, y_0, 0)$$

et aussi

(28) $$y'_0 f_{y'}(x, y_0, y'_0) \geqq \mu_1 |y'_0|^{1+\alpha} + \nu_1 - f(x, y_0, 0)$$

parce que, du fait que $f_{y'}(x, y, y')$ est fonction croissante de y' résulte

$$y'_0 f_{y'}(x, y_0, y'_0) > y'_0 f_{y'}(x, y_0, \bar{y}').$$

Et l'équation (28) montre que, pour $x \to \bar{x}$, la limite de $f_{y'}(x, y_0, y'_0)$ devant être finie, il en est de même de la limite $y^*(\bar{x})$ de $y'_0(x)$.

Si enfin nous posons $y^*(x) = y'_0(x)$ pour tout x de E, le raisonnement que nous avons fait montre que la fonction $y^*(x)$ est continue dans tout (a, b) et, puisque

$$y_0(x) = y_0(a) + \int_a^x y'_0(x)\,dx = y_0(a) + \int_a^x y^*(x)\,dx,$$

il en résulte que $y_0(x)$ admet dans tout (a, b) une dérivée première égale à $y^*(x)$, donc finie et continue. La (27) est donc vérifiée partout.

Le premier terme du premier membre de (27) admet une dérivée finie et continue; donc aussi le second terme et l'on a

$$f_y\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big) = \frac{d}{dx} f_{y'}\big(x, y_0(x), y'_0(x)\big)$$

dans tout (a, b). De cette équation on déduit enfin, par une observation connue de Hilbert [1], que $y''_0(x)$ existe elle aussi, finie et continue, dans tout (a, b).

La proposition ainsi établie s'étend à toutes les intégrales régulières positives, indépendamment de la condition (22) et sous la forme suivante :

Si I[C] *est régulière positive, la fonction* $y_0(x)$ *qui définit une courbe* C_0 *rendant* I[C] *minimum dans la classe* $\mathcal{C}_0$ *admet les*

---

[1] *Cf.* [101], t. II, p. 96.

dérivées $y'_0(x)$ *et* $y''_0(x)$ *finies et continues, à l'exception au plus des points d'un ensemble* E *fermé et de mesure nulle, en tout point duquel* $y'_0(x)$ *existe mais est infinie. L'équation d'Euler est satisfaite sauf aux points de* E, *s'ils existent.*

La courbe C_0 est ainsi composée d'un nombre fini ou d'une infinité dénombrable d'arcs satisfaisant à l'équation d'Euler et ayant une longueur totale égale à celle de la courbe elle même.

Il existe d'ailleurs des conditions plus générales que celles du théorème établi qui assurent aussi que toute la courbe C_0 satisfait à l'équation d'Euler.

15. **Extensions.** — La théorie exposée ici très rapidement et seulement dans ses premiers développements s'étend aux intégrales de forme paramétrique, aux intégrales dans lesquelles la fonction sous le signe $\int$ dépend aussi de dérivées d'ordre supérieur au premier, enfin aux intégrales qui dépendent de courbes de l'espace à un nombre quelconque de dimensions et aux intégrales multiples. Elle s'étend aussi aux problèmes de Lagrange et de Mayer.

Après la publication des *Fondamenti* de Tonelli, ont contribué à cette étude, avec L. Tonelli, H. Hahn, M. Lavrentieff, N. Bogoliouboff, L. M. Graves, M. Nagumo, S. Cinquini, E. J. Mac Shane, A. Del Chiaro, B. Manià et d'autres auteurs.

LIVRE II.

THÉORIE DES ÉQUATIONS INTÉGRALES

CHAPITRE VI.

GÉNÉRALITÉS. ÉQUATIONS INTÉGRALES DE VOLTERRA.

I. — PRÉLIMINAIRE : INVERSION D'UNE TRANSFORMATION FONCTIONNELLE.

1. Rappelons un résultat précédemment établi (Chap. IV, n° 18) : étant donnée une fonctionnelle

$$F\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}})\right],$$

les valeurs de l'argument $y(t)$ qui rendent F maximum ou minimum doivent être cherchées parmi celles qui rendent la différentielle δF identiquement nulle quel que soit δy.

Admettons que cette différentielle ait la forme régulière

$$\delta F = \int_a^b F'\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}), \xi\right] \delta y(\xi)\, d\xi,$$

les fonctions $y(t)$ cherchées devront vérifier la condition

$$(1) \qquad F'\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}), \xi\right] = 0,$$

qui exprime que la dérivée fonctionnelle de F est identiquement nulle.

2. Nous allons montrer maintenant que des équations de ce type peuvent être obtenues comme généralisation d'un système ordinaire de n équations à n inconnues

$$(2)\qquad \begin{cases} f_1(y_1, y_2, \ldots, y_n) = z_1, \\ f_2(y_1, y_2, \ldots, y_n) = z_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_n(y_1, y_2, \ldots, y_n) = z_n \end{cases}$$

ou, plus brièvement,

$$(2')\qquad f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) = z_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Il suffit, pour s'en rendre compte, d'appliquer le *principe général de passage du discontinu au continu* (Chap. I, n° 5). Des relations telles que (2) définissent une substitution des variables y_i aux variables z_i. Si l'on remplace les indices par des paramètres continus x ou t et la fonction $f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ par une fonctionnelle de $y(t)$ dépendant également du paramètre x (qui remplace l'indice i), on est amené à considérer la substitution fonctionnelle

$$(3)\qquad F\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}), x\right] = z(x)$$

entre les fonctions $y(x)$ et $z(x)$. Si la seconde de ces fonctions est connue et la première inconnue, on a à faire l'inversion de la substitution fonctionnelle (3), problème qui correspond, dans notre théorie, à la résolution du système (2) de l'analyse ordinaire. Et il est bien clair que les équations du type (1) rentrent comme cas particulier dans la forme (3).

Pour aborder le problème ainsi posé (inversion d'une substitution fonctionnelle), il est naturellement nécessaire de préciser la forme de la fonctionnelle F.

Un cas particulier notable sera celui où

$$F\left[y(\overset{b}{\underset{a}{t}}), x\right]$$

est une fonctionnelle régulière de degré m (*cf.* Chap. III, § II).

Ce cas correspond dans l'Algèbre ordinaire à un système (2) dans lequel les f_i sont des polynomes de degré m.

Un cas plus particulier encore, mais fort intéressant (parce que son étude est le préliminaire indispensable de l'étude des cas plus compliqués) est celui ou F est fonctionnelle linéaire de y; il correspond à un système (2) linéaire.

Et il faut encore fragmenter ce cas. Si la fonctionnelle linéaire F est régulière et sans points exceptionnels, on pourra la mettre sous la forme

$$\int_a^b y(t)\,\mathrm{K}(t,\,x)\,dt,$$

où $\mathrm{K}(t,\,x)$ est une fonction donnée et l'équation (3) s'écrira

$$\int_a^b y(t)\,\mathrm{K}(t,\,x)\,dt = z(x); \tag{4}$$

elle sera dite *équation intégrale linéaire de première espèce.*

Si la fonctionnelle a le point exceptionnel $t = x$, l'équation sera du type

$$\int_a^b y(t)\,\mathrm{K}(t,\,x)\,dt + a_0(x)\,y(x) = z(x) \tag{5}$$

(s'il y a continuité d'ordre zéro) ou en général

$$\int_a^b y(t)\,\mathrm{K}(t,\,x)\,dt + a_0(x)\,y(x) + a_1(x)\,y'(x) + \ldots + a_n(x)\,y^{(n)}(x) = z(x) \tag{6}$$

(s'il y a continuité d'ordre n).

L'équation (5), *où $a_0(x)$ est supposé ne pas s'annuler*, est dite *équation intégrale de seconde espèce*, ou *équation de Fredholm.* Si $a_0(x)$ s'annule dans l'intervalle de variation de x, il y a des difficultés particulières; M. E. Picard, qui a traité le premier des équations de ce genre, les désigne sous le nom d'*équations de troisième espèce*.

Enfin l'équation (6), dans laquelle la fonction inconnue y apparaît à la fois sous le signe d'intégration et par ses dérivées, participe des équations différentielles : on la nomme *équation intégro-différentielle;* nous avons déjà rencontré (Chap. IV) des équations de ce type. Leur étude systématique sera faite dans le second volume du présent Ouvrage.

3. Supposons maintenant que la fonctionnelle linéaire F dépende

seulement des valeurs de $y(t)$ dans l'intervalle $a \leqq t \leqq x$ avec $a \leqq x \leqq b$. Nous aurons des équations dites *équations de Volterra* [1] qui seront de forme

$$\int_a^x y(t)\,K(t, x)\,dt = z(x), \tag{4'}$$

équation linéaire de première espèce;

$$\int_a^x y(t)\,K(t, x)\,dt + a_0(x)y(x) = z(x), \tag{5'}$$

équation linéaire de seconde espèce.

4. Ces équations de Volterra, dans lesquelles la limite supérieure d'intégration est *variable* avec le paramètre x, ne diffèrent pas en substance des précédentes (4) et (5) pour lesquelles la limite supérieure d'intégration était *fixe* (et égale à b). Si nous admettons en effet que la fonction connue $K(t, x)$ peut être discontinue, avec des discontinuités de première espèce, il suffit de prendre dans (4) ou (5)

$$K(t, x) = 0 \qquad \text{pour } t > x$$

pour que ces équations se réduisent aux équations correspondantes (4′) et (5′) de Volterra. Il y a pourtant dans les résultats concernant les deux cas des limites fixes et des limites variables des différences telles que nous devrons les traiter séparément.

Nous envisagerons, dans ce Chapitre et dans le suivant, les équations à limites variables.

II. — L'ÉQUATION LINÉAIRE DE VOLTERRA DE SECONDE ESPÈCE.

5. Changeant légèrement les notations, nous écrirons cette équation

$$\varphi(x) + \int_0^x \varphi(t)\,K(t, x)\,dt = f(x). \tag{7}$$

La fonction $K(t, x)$ est donnée et s'appelle le *noyau* de l'équation

(1) Ce furent les premiers types traités d'équations intégrales. *Cf.* [123].

intégrale. Nous admettrons d'abord que ce noyau est fini et continu dans le domaine

$$0 \leqq t \leqq x \leqq a,$$

a étant une quantité finie. Il est donc connu dans le triangle limité par l'axe des x, la bissectrice des axes $x = t$ et la parallèle $x = a$ à l'axe des t (*fig.* 1); nous désignerons par M le maximum du module

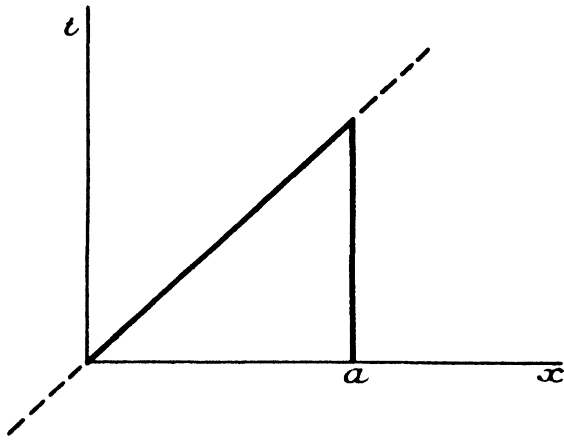


Fig. 1.

de K dans ce triangle. Le *second membre* $f(x)$ est une fonction également connue, finie et continue pour

$$0 \leqq x \leqq a.$$

$\varphi(x)$ est l'inconnue.

Il est bien clair que l'équation précédente (5') se ramène à la forme (7), avec un noyau qui reste fini et continu pourvu que $a_0(x)$ ne s'annule pas dans l'intervalle de variation de x; le cas où $a_0(x)$ s'annulerait sera envisagé ultérieurement.

6. Le problème à n inconnues correspondant. — Pour résoudre l'équation (7), M. Volterra s'appuie sur le principe général de passage du discontinu au continu et envisage cette équation comme cas limite d'un système de n équations à n inconnues. Nous suivrons ici son analyse (¹) :

Divisons l'intervalle (o, a) en n intervalles partiels $h_1, h_2, \ldots, h_n$ et soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs de x respectivement intérieures à ces intervalles. Le système linéaire correspondant à (7) est évidem-

(¹) *Cf.* VOLTERRA, [123], [113] et aussi [112]-[114] de la Bibliographie I.

ment

$$\varphi(x_1) = f(x_1),$$
$$\varphi(x_2) + \varphi(x_1) K(x_1, x_2) h_1 = f(x_2),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi(x_n) + \varphi(x_1) K(x_1, x_n) h_1 + \ldots + \varphi(x_{n-1}) K(x_{n-1}, x_n) h_{n-1} = f(x_n),$$

d'où, en posant

$$\varphi(x_i) = \varphi_i, \qquad f(x_i) = f_i,$$
$$K(x_r, x_i) h_r = A_{r,i}$$

le système

$$\varphi_1 = f_1,$$
$$\varphi_2 + \varphi_1 A_{1,2} = f_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi_n + \varphi_1 A_{1,n} + \varphi_2 A_{2,n} + \ldots + \varphi_{n-1} A_{n-1,n} = f_n,$$

qui peut encore s'écrire

$$(8) \qquad \varphi_i + \sum_{1}^{i-1}{}_r \varphi_r A_{r,i} = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

La solution de (8) par rapport aux inconnues φ_i est obtenue par la règle de Cramer. Le déterminant du système est

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \ldots\ldots & 0 \\ A_{1,2} & 1 & 0 & 0 & \ldots & \ldots\ldots & 0 \\ A_{1,3} & A_{2,3} & 1 & 0 & \ldots & \ldots\ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & . & . & \ldots & \ldots\ldots & . \\ A_{1,n} & A_{2,n} & A_{3,n} & . & \ldots & A_{n-1,n} & 1 \end{vmatrix} = 1$$

et l'on a donc, pour l'inconnue φ_j,

$$(9) \qquad \varphi_j = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & f_1 \\ A_{1,2} & 1 & 0 & \ldots & f_2 \\ \ldots & . & . & \ldots & .. \\ A_{1,j} & A_{2,j} & . & \ldots & f_j \end{vmatrix} = f_j + \sum_{1}^{j-1}{}_s f_s G_{s,j},$$

expression linéaire par rapport aux f_s, dont les coefficients $G_{s,j}$ s'expriment à l'aide des $A_{r,i}$, il vient

$$(10) \qquad G_{s,i} = (-1)^{s+i} \begin{vmatrix} A_{s,s+1} & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ A_{s,s+2} & A_{s+1,s+2} & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & . & \ldots & . \\ A_{s,i-1} & A_{s+1,i-1} & . & \ldots & 1 \\ A_{s,i} & A_{s+1,i} & . & \ldots & A_{i-1,i} \end{vmatrix},$$

polynome de degré $i-s$ par rapport aux coefficients $A_{r,i}$. Nous décomposerons ce polynome en une somme de polynomes homogènes de degrés respectifs 1, 2, ..., $i-s$

(10′) $$G_{s,i} = A_{s,i}^{(1)} + A_{s,i}^{(2)} + \ldots + A_{s,i}^{(i-s)}.$$

et il reste à préciser l'expression des divers termes homogènes $A_{s,i}^{(h)}$. Or, en développant par rapport à sa dernière ligne le déterminant (10), nous obtenons

$$G_{s,i} = -A_{s,i} - \sum_{s+1}^{i-1}{}_r\, G_{s,r} A_{r,i}$$

que nous écrirons encore

(11) $$G_{s,i} + A_{s,i} + \sum_{s+1}^{i-1}{}_r\, G_{s,r} A_{r,i} = 0 \quad [1].$$

En remplaçant, dans (11), $G_{s,i}$ et $G_{s,r}$ par les valeurs tirées de (10′) et en identifiant les termes des divers degrés, on a enfin

(12) $$\begin{cases} A_{s,i}^{(1)} = -A_{s,i}, \\ A_{s,i}^{(2)} = \sum_{s+1}^{i-1}{}_r\, A_{s,r}^{(1)} A_{r,i}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ A_{s,i}^{(h)} = \sum_{s+1}^{i-1}{}_r\, A_{s,r}^{(h-1)} A_{r,i}^{(1)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le système d'équations (8) est donc résolu par les formules (9) où les coefficients $G_{s,j}$ sont donnés, en fonction des $A_{r,i}$ par (10′) et (12).

7. Passage à l'équation intégrale (7). — Imaginons maintenant que le nombre des intervalles partiels $h_1, h_2, \ldots, h_n$ augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro. Les indices i, r, s sont remplacés par des variables continues, les sommes précédentes par des intégrales et l'on peut donc prévoir, d'après les calculs du n° 6,

---

[1] (11) s'obtient aussi en portant, dans les équations (8), les expressions (9) des inconnues.

que (7) sera résolu par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\,S(t, x)\,dt, \tag{13}$$

le noyau S qui est dit noyau *résolvant* ou *réciproque* de (7) étant donné par la série

$$S(t, x) = \sum_1^\infty {}_h K^{(h)}(t, x) \tag{14}$$

avec

$$\left\{\begin{array}{l} K^{(1)}(t, x) = -K(t, x), \\ K^{(2)}(t, x) = \int_t^x K^{(1)}(t, \xi)\,K^{(1)}(\xi, x)\,d\xi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ K^{(h)}(t, x) = \int_t^x K^{(h-1)}(t, \xi)\,K^{(1)}(\xi, x)\,d\xi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{15}$$

8. Vérification. — Il reste à vérifier la solution précédente et à constater qu'elle est unique. C'est ce que nous ferons en montrant que toute la théorie se résume dans la démonstration des trois principes fondamentaux suivants :

I. *Principe de convergence.* — Pour l'obtenir nous rechercherons d'abord des limites supérieures des fonctions $K^{(h)}(t, x)$ définies par les formules (15) et qui sont dites *noyaux itérés* de $K(t, x)$.

Puisque dans le triangle

$$0 \leqq t \leqq x \leqq a,$$

$K(t, x)$ est continu et borné par M en module, on aura

$$|K^{(2)}(t, x)| \leqq \int_t^x M.M\,d\xi = M^2(x-t),$$

$$|K^{(3)}(t, x)| \leqq \int_t^x M.M^2(\xi - t)\,d\xi = M^3\frac{(x-t)^2}{2!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$|K^{(h)}(t, x)| \leqq \int_t^x M.M^{h-1}\frac{(\xi-t)^{h-2}}{(h-2)!}\,d\xi = M^h\frac{(x-t)^{h-1}}{(h-1)!},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

La série

$$M + \frac{M^2(x-t)}{1!} + \frac{M^3(x-t)^2}{2!} + \ldots + \frac{M^h(x-t)^{h-1}}{(h-1)!} + \ldots = M\,e^{M(x-t)}$$

étant absolument et uniformément convergente, *il en est de même de la série* (14) *des noyaux itérés et la somme de cette série* (14) *représente, dans le champ considéré, une fonction finie et continue* $S(t, x)$ (*noyau résolvant*).

II. *Principe de réciprocité.* — Notons d'abord que le noyau itéré $K^{(h)}$ peut s'écrire aussi

$$K^{(h)}(t, x) = \int_t^x K^{(j)}(t, \xi)\, K^{(h-j)}(\xi, x)\, d\xi, \tag{16}$$

j étant l'un quelconque des nombres $1, 2, \ldots, (h-1)$.

En effet (16) est évidente pour $h = 2$ et l'on peut donc, pour l'établir, la supposer vérifiée par le noyau $K^{(h-1)}$.

Il vient alors

$$\begin{aligned} K^{(h)}(t, x) &= \int_t^x K^{(h-1)}(t, \xi)\, K^{(1)}(\xi, x)\, d\xi \\ &= \int_t^x K^{(1)}(\xi, x)\, d\xi \int_t^\xi K^{(j)}(t, \eta)\, K^{(h-j-1)}(\eta, \xi)\, d\eta \\ &= \int_t^x K^{(j)}(t, \eta)\, d\eta \int_\eta^x K^{(h-j-1)}(\eta, \xi)\, K^{(1)}(\xi, x)\, d\xi \quad [1] \\ &= \int_t^x K^{(j)}(t, \eta)\, K^{(h-j)}(\eta, x)\, d\eta, \end{aligned}$$

c'est-à-dire précisément (16).

En particulier les formules (15) peuvent être remplacées par les suivantes :

$$K^{(h)}(t, x) = \int_t^x K^{(1)}(t, \xi)\, K^{(h-1)}(\xi, x)\, d\xi. \tag{15'}$$

Or si l'on ajoute membre à membre les (15) et que l'on tienne compte de (14), on a

$$S(t, x) = -K(t, x) - \int_t^x S(t, \xi)\, K(\xi, x)\, d\xi$$

---

[1] En employant, pour échanger l'ordre des signes d'intégration, la formule bien connue de Dirichlet

$$\int_h^k d\xi \int_h^\xi d\eta\, F(\xi, \eta) = \int_h^k d\eta \int_\eta^k d\xi\, F(\xi, \eta),$$

qui sera utilisée plusieurs fois dans la suite.

et les (15′) donnent de même

$$S(t, x) = -K(t, x) - \int_t^x K(t, \xi) S(\xi, x) \, d\xi.$$

Ces deux formules, que nous écrirons

$$(17) \qquad K(t, x) + S(t, x) = -\int_t^x S(t, \xi) K(\xi, x) \, d\xi = -\int_t^x K(t, \xi) S(\xi, x) \, d\xi,$$

se déduisent l'une de l'autre en échangeant le rôle de K et S. *Elles expriment la réciprocité entre le noyau* K *de l'équation* (7) *et le noyau résolvant* S *correspondant.*

Comme corollaire on pourra calculer K à partir de S par des expressions en tout semblables à (14) et (15)

$$K(t, x) = \sum_1^\infty{}_h S^{(h)}(t, x)$$

avec

$$S^{(1)}(t, x) = -S(t, x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$S^{(h)}(t, x) = \int_t^x S^{(j)}(t, \xi) S^{(h-j)}(\xi, x) \, d\xi,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

III. *Principe d'inversion. — Les précédentes* (17) *donnent l'inversion de la relation intégrale*

$$(7) \qquad \varphi(x) + \int_0^x \varphi(t) K(t, x) \, dt = f(x)$$

et établissent l'unicité de sa solution qui est donnée par

$$(18) \qquad \varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t) S(t, x) \, dt.$$

Soit, en effet, une fonction qui vérifie (7); multiplions cette équation, où x a été remplacé par ξ, par $S(\xi, x)$ et intégrons par rapport à ξ entre les limites zéro et x. Il vient

$$\int_0^x \varphi(\xi) S(\xi, x) \, d\xi + \int_0^x d\xi \, S(\xi, x) \int_0^\xi \varphi(t) K(t, \xi) \, dt = \int_0^x f(\xi) S(\xi, x) \, d\xi,$$

d'où, en permutant l'ordre des intégrations du second terme et en y échangeant ξ et t

$$\int_0^x \varphi(\xi)\, d\xi \left\{ S(\xi, x) + \int_\xi^x K(\xi, t)\, S(t, x)\, dt \right\} = \int_0^x f(\xi)\, S(\xi, x)\, d\xi$$

ou, d'après l'une des (17),

$$-\int_0^x \varphi(\xi)\, K(\xi, x)\, d\xi = \int_0^x f(\xi)\, S(\xi, x)\, d\xi$$

et enfin, d'après (7),

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(\xi)\, S(\xi, x)\, d\xi.$$

Si donc l'équation (7) a une solution, cette solution est nécessairement unique et donnée par (18). Mais un calcul de tout point analogue, fait en partant de (18) que l'on multiplie par $K(\xi, x)$ après y avoir remplacé x par ξ, amène à l'équation (7) et vérifie donc la solution (18). Ce calcul est d'ailleurs superflu, vu la réciprocité entre S et K.

9. Récapitulation des trois principes. — I. *La série* (14) *des noyaux itérés est convergente et définit le noyau résolvant* $S(t, x)$.

II. *On a la formule* (17)

$$K(t, x) + S(t, x) = -\int_t^x S(t, \xi)\, K(\xi, x)\, d\xi = -\int_t^x K(t, \xi)\, S(\xi, x)\, d\xi. \tag{17}$$

III. *La solution unique de*

$$\varphi(x) + \int_0^x \varphi(t)\, K(t, x)\, dt = f(x) \tag{7}$$

est donnée par la formule

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t)\, S(t, x)\, dt. \tag{18}$$

Les résultats prévus au n° 7 sont ainsi entièrement justifiés.

La méthode précédente et les trois principes se retrouveront pour les équations à limites fixes avec la seule différence que, le déter-

minant du système linéaire aux inconnues φ_i n'étant plus égal à l'unité, l'expression du noyau résolvant est moins simple.

Dans les deux cas c'est le principe général de passage du discontinu au continu qui sert de guide pour la résolution.

10. Ajoutons une remarque concernant les deux noyaux $K(\xi, x)$ et $S(\xi, x)$.

Nous pouvons considérer $S(\xi, x)$ comme une fonctionnelle dépendant de toutes les valeurs qui prend $K(\xi', x')$ dans le domaine

$$\xi \leqq \xi' \leqq x' \leqq x$$

et écrire

$$S(\xi, x) = \underset{\xi \leqq \xi' \leqq x' \leqq x}{F[K(\xi', x')]}$$

avec, d'après ce qui précède,

$$F[K] = \sum_1^\infty {}_i K^{(i)}(\xi, x).$$

La même opération fonctionnelle, qui fait passer de K à S, fera passer également de S à K; on aura

$$K(\xi, x) = \sum_1^\infty {}_i S^{(i)}(\xi, x) = \underset{\xi \leqq \xi' \leqq x' \leqq x}{F[S(\xi', x')]}.$$

Cette opération fonctionnelle, appliqué une fois à K, donne le noyau résolvant S; appliquée deux fois à K, elle reproduit K lui-même

$$F\Big[F[K]\Big] \equiv K.$$

11. Méthode des approximations successives. — L'équation (7) peut également être traitée *par la méthode des approximations successives* (¹). Écrivons-la

$$(7') \qquad \varphi(x) = f(x) - \int_0^x \varphi(\xi)\, K(\xi, x)\, d\xi;$$

nous en tirons

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x f(\xi)\, K(\xi, x)\, d\xi + \int_0^x K(\xi, x)\, d\xi \int_0^\xi \varphi(\eta)\, K(\eta, \xi)\, d\eta,$$

(¹) *Cf.* LE ROUX, [62]; PICARD, [77]; BÔCHER, [8]; LALESCO [53].

puis

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x f(\xi)\,K(\xi, x)\,d\xi + \int_0^x K(\xi, x)\,d\xi \int_0^\xi f(\eta)\,K(\eta, \xi)\,d\eta$$
$$- \int_0^x K(\xi, x)\,d\xi \int_0^\xi K(\eta, \xi)\,d\eta \int_0^\eta \varphi(\zeta)\,K(\zeta, \eta)\,d\zeta,$$

et ainsi de suite, en remplaçant chaque fois sous le signe d'intégration φ par le second membre de (7'). Après i substitutions et en échangeant convenablement l'ordre des signes d'intégration, il vient

$$\varphi(x) = f(x) + \int_0^x f(t) \left\{ K^{(1)}(t, x) + K^{(2)}(t, x) + \ldots + K^{(i)}(t, x) \right\} dt$$
$$+ \int_0^x \varphi(t)\,K^{(i+1)}(t, x)\,dt$$

et, faisant tendre i vers l'infini, nous retrouvons la solution sous la forme (18).

On peut aussi introduire dans l'équation un paramètre λ, en l'écrivant

(7'') $$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_0^x \varphi(t)\,K(t, x)\,dt$$

et chercher la solution développée suivant les puissances de λ. On obtient immédiatement

(18'') $$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x f(t)\,S(t, x; \lambda)\,dt$$

avec le noyau résolvant

$$S(t, x; \lambda) = \sum_1^\infty{}_h\, \lambda^{h-1}\,K^{(h)}(t, x)$$

qui, d'après le principe de convergence, est évidemment une fonction entière de λ, de sorte que la solution donnée sera valable quel que soit λ.

Ajoutons enfin que l'on peut établir directement l'unicité de la solution. Si (7'') par exemple avait deux solutions, leur différence $u(x)$ vérifierait l'équation homogène

$$u(x) + \lambda \int_0^x u(t)\,K(t, x)\,dt = 0,$$

d'où, par application du procédé d'approximations successives, on

tire

$$u(x) = \lambda^i \int_0^x u(t)\,K^{(i)}(t, x)\,dt.$$

Admettant que $|u(x)|$ est borné par le nombre N, nous aurons

$$|u(x)| < \lambda^i \frac{M^i N x^i}{i!}$$

qui tend vers zéro quand i tend vers l'infini; $u(x)$ est donc identiquement nulle.

12. La notion de composition. Forme intuitive de la solution précédente. — Les relations (15) qui définissent les noyaux itérés mettent en évidence l'opération fonctionnelle

$$P(t, x) = \int_t^x L(t, \xi)\,M(\xi, x)\,d\xi, \tag{19}$$

qui, à partir des deux noyaux L et M, en donne un troisième P.

M. Volterra, qui a nommé cette opération *composition*, a remarqué qu'elle obéit à des règles de calcul très analogues à celles qui régissent le produit de nombres ordinaires.

Nous examinerons ultérieurement ([1]) les nombreuses applications de cette notion de composition. Mais dès maintenant nous donnerons les propriétés les plus simples et nous montrerons comment la notation de l'opération (19) comme un produit symbolique permet de présenter sous la forme intuitive la résolution de l'équation (7).

Pour ne pas alourdir inutilement l'exposé, nous restons dans le champ des fonctions finies et continues.

Remplaçant respectivement par x et y les variables t et x précédentes nous définirons par

$$k(x, y) = \int_x^y f(x, \xi)\,g(\xi, y)\,d\xi \tag{20}$$

la *composition à limites variables*, ou *composition de première espèce* des deux fonctions f et g. Nous écrirons en abrégé

$$k(x, y) = \overset{*}{f}\overset{*}{g}(x, y)$$

([1]) Livre IV, second volume du présent Ouvrage. *Cf.* aussi VOLTERRA, [113] de la bibliographie I, Chap. IX, et VOLTERRA et PÉRÈS, [133].

ou simplement

$$k = \overset{*}{f}\overset{*}{g}.$$

Il est clair que, si f et g sont définies dans un triangle tel que celui que représente la figure, qui a pour sommet un point quelconque A du plan ($x = a$, $y = b$) et dont les côtés sont les parallèles aux axes

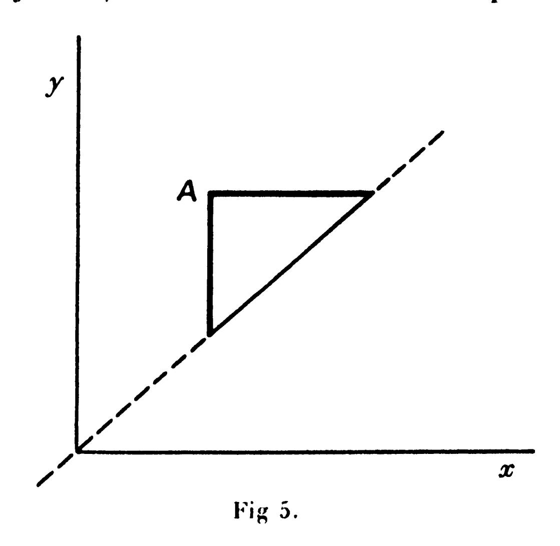


Fig 5.

et la droite $y = x$, leur produit de composition sera défini dans le même triangle. D'autre part ce produit est évidemment *distributif*

$$\overset{*}{f}(\overset{*}{g} + \overset{*}{h}) = \overset{*}{f}\overset{*}{g} + \overset{*}{f}\overset{*}{h}$$

et

$$(\overset{*}{g} + \overset{*}{h})\overset{*}{f} = \overset{*}{g}\overset{*}{f} + \overset{*}{h}\overset{*}{f};$$

il est de même *associatif*, c'est-à-dire que l'on a

$$\overset{*}{f}(\overset{*}{g}\overset{*}{h}) = (\overset{*}{f}\overset{*}{g})\overset{*}{h},$$

ce qui s'écrit encore

$$\int_x^y f(x, \xi)\, d\xi \int_\xi^y g(\xi, \eta)\, h(\eta, y)\, d\eta$$
$$= \int_x^y h(\eta, y)\, d\eta \int_x^\eta f(x, \xi)\, g(\xi, \eta)\, d\xi,$$

formule évidente en appliquant, une fois encore, la règle d'échange des signes d'intégration.

Le produit de composition n'est pas en général commutatif

$$\overset{*}{f}\overset{*}{g} \neq \overset{*}{g}\overset{*}{f}.$$

Lorsque l'on a

$$\overset{*}{f}\overset{*}{g} = \overset{*}{g}\overset{*}{f}$$

les fonctions $\overset{*}{f}$ et $\overset{*}{g}$ sont dites *permutables* et leur produit de composition est permutable avec chacune d'elles : on a en effet

$$(\overset{*}{f}\overset{*}{g})\overset{*}{f} = \overset{*}{f}(\overset{*}{g}\overset{*}{f}) = \overset{*}{f}(\overset{*}{f}\overset{*}{g}).$$

Dès lors, si l'on se limite à un groupe de fonctions permutables entre elles, le produit de composition $\overset{*}{f}\overset{*}{g}$ obéit aux mêmes règles de calcul formelles que le produit algébrique ([1]).

Si les fonctions envisagées ne sont pas permutables, la notation de la composition comme un produit symbolique reste avantageuse, il faut seulement ne pas changer l'ordre des facteurs.

13. Ajoutons quelques remarques simples qui permettent de déduire d'une fonction $f(x, y)$ tout un *groupe de fonctions permutables*. On pourra d'abord composer f un nombre quelconque de fois avec elle-même et l'on aura ainsi les *puissances entières de composition*

$$f, \quad \overset{*}{f}{}^{2}, \quad \ldots, \quad \overset{*}{f}{}^{n}, \quad \ldots,$$

qui sont toutes permutables avec f (*cf.* n° 8, II). Sera de même permutable avec f tout polynome à coefficients constants des puissances de composition de f et aussi toute série

$$a_1 f + a_2 \overset{*}{f}{}^{2} + \ldots + a_n \overset{*}{f}{}^{n} + \ldots$$

des puissances de composition de f, sous réserve de sa convergence uniforme. Ajoutons que, pour étudier cette convergence, on tirera parti des inégalités suivantes : *on a*

$$\overset{*}{f}{}^{n} < M^n \frac{|y - x|^{n-1}}{(n-1)!}.$$

([1]) Il s'agit bien entendu, des seules règles de calcul spécifiées plus haut et de celles qui en résultent. Si l'on envisage, d'autre part, la propriété d'après laquelle un produit de facteurs n'est nul qu'avec l'un de ces facteurs, cette propriété pourra s'étendre à la composition, sous des conditions assez peu restrictives pour les noyaux envisagées, en se plaçant, bien entendu, dans le cas où le *produit de composition est identiquement nul par rapport à x et y.*

si, dans le domaine de définition de f, on a

$$|f| < M;$$

ces inégalités s'établissent en reprenant le raisonnement qui nous a conduit plus haut au principe de convergence. Toutes les fonctions ainsi obtenues (puissances, polynomes, séries de composition) sont permutables entre elles.

Nous aurons enfin besoin du symbole $\overset{*}{f}{}^0$, puissance nulle de composition, défini par la règle de calcul suivante :

$$\overset{*}{f}{}^0 \overset{*}{g} = \overset{*}{g}\overset{*}{f}{}^0 = g(x, y),$$

quelle que soit la fonction g, *permutable ou non* avec $f(x, y)$. Ce symbole, qui joue le rôle *d'unité*, est donc permutable avec toute fonction $g(x, y)$. De plus son effet est indépendant de f de sorte que nous pouvons poser, quelle que soit la fonction g

$$\overset{*}{f}{}^0 = \overset{*}{g}{}^0.$$

Comme la fonction égale à l'unité et ses diverses puissances de composition

$$\overset{*}{1}{}^2 = \frac{y - x}{1!}, \qquad \overset{*}{1}{}^3 = \frac{(y - x)^2}{2!}, \qquad \dots, \qquad \overset{*}{1}{}^n = \frac{(y - x)^{n-1}}{(n-1)!}, \qquad \dots$$

jouent un rôle assez important par la suite, nous utiliserons ordinairement pour *l'unité* $\overset{*}{f}{}^0$ le symbole $\overset{*}{1}{}^0$.

Il est clair que l'on pourra *composer* de même des fonctions symboliques de forme

$$F = a\overset{*}{1}{}^0 + f(x, y),$$

où a est une constante qui multiplie $\overset{*}{1}{}^0$ et où f est dite *partie régulière* de F. Si les parties régulières sont *permutables*, il en est de même des fonctions symboliques correspondantes : dans tout autre cas il faudra distinguer *l'ordre de composition* de deux fonctions symboliques.

14. Considérons alors les deux équations intégrales que nous

dirons *associées* ou *adjointes*

(21) $$\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{f}\right)\overset{*}{\varphi} = h,$$

(22) $$\overset{*}{\varphi}\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{f}\right) = h,$$

qui s'écrivent encore

(21) $$\varphi(x, y) - \int_x^y f(x, \xi)\,\varphi(\xi, y)\,d\xi = h(x, y),$$

(22) $$\varphi(x, y) - \int_x^y \varphi(x, \xi)\,f(\xi, y)\,d\xi = h(x, y).$$

Dans l'une ou l'autre équation $f(x, y)$ (*noyau*) et $h(x, y)$ (*second membre*) sont *donnés*, permutables ou non, et l'inconnue est $\varphi(x, y)$.

Leur résolution revient à définir

$$\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{f}\right)^{-1}.$$

Or l'identité algébrique

$$(1 + z + z^2 + \ldots)(1 - z) = 1$$

conduit, en remplaçant z par f et les produits de z par des compositions de f, à l'identité

(23) $$\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{g}\right)\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{f}\right) = \overset{*}{1}{}^0$$

avec

(24) $$-g = f + \overset{*}{f}{}^2 + \overset{*}{f}{}^3 + \ldots.$$

Il n'y a aucune difficulté de convergence, la série (24) étant majorée par

$$M + M^2 \frac{|y - x|}{1!} + M^3 \frac{|y - x|^2}{2!} + \ldots.$$

D'ailleurs, f et g étant permutables, on a également (fin du n° 13)

$$\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{f}\right)\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{g}\right) = \overset{*}{1}{}^0,$$

de sorte que l'on peut poser

(23') $$\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{g}\right) = \left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{f}\right)^{-1},$$

cette définition étant valable quel que soit l'ordre des facteurs de composition.

Dès lors toute solution de (21) vérifie aussi

$$\left(\overset{*}{1}{}^0-\overset{*}{g}\right)\left(\overset{*}{1}{}^0-\overset{*}{f}\right)\overset{*}{\varphi}=\left(\overset{*}{1}{}^0-\overset{*}{g}\right)\overset{*}{h},$$

d'où

$$\varphi=\left(\overset{*}{1}{}^0-\overset{*}{g}\right)\overset{*}{h}$$

et la valeur ainsi obtenue pour φ est bien solution de (21) parce que

$$\left(\overset{*}{1}{}^0-\overset{*}{f}\right)\left(\overset{*}{1}{}^0-\overset{*}{g}\right)\overset{*}{h}=\overset{*}{1}{}^0\overset{*}{h}=h.$$

On fera un calcul analogue pour (22) et l'on a, en résumé, le résultat suivant : *les deux équations associées*

(21) $$\left(\overset{*}{1}{}^0-\overset{*}{f}\right)\overset{*}{\varphi}=h,$$

(22) $$\overset{*}{\varphi}\left(\overset{*}{1}{}^0-\overset{*}{f}\right)=h,$$

sont respectivement résolues par

(21_1) $$\overset{*}{\varphi}=\left(\overset{*}{1}{}^0-\overset{*}{g}\right)\overset{*}{h},$$

(22_1) $$\varphi=\overset{*}{h}\left(\overset{*}{1}{}^0-\overset{*}{g}\right),$$

le *noyau résolvant* g étant le même, ayant la valeur

(24) $$-g=f+\overset{*}{f}{}^2+\overset{*}{f}{}^3+\ldots$$

et vérifiant les égalités (23) et (23′) qui peuvent s'écrire

(25) $$g+f=\overset{*}{g}\overset{*}{f}=\overset{*}{f}\overset{*}{g}.$$

Le lecteur a déjà constaté que les équations qui viennent d'être traitées, (21) et (22), sont du type (7) et que la solution qui vient d'en être donnée est *identique* à celle du n° 8, les identités (25) revenant, avec des différences de notations insignifiantes, aux précédentes (17), de sorte qu'elles expriment *le principe de réciprocité* (¹).

La variable x de l'équation (7) correspond à y de l'équation (22), mais (22) contient de plus un paramètre x, limite inférieure d'intégration. Dans (21) la variable est x et le paramètre y. Si dans (21) ou (22) on prend respectivement le paramètre constant, nul par

(¹) Les noyaux K et S du n° 8 s'appellent maintenant $-f$ et $-g$ de sorte que (17), laquelle peut s'écrire $K+S=-\overset{*}{S}\overset{*}{K}=-\overset{*}{K}\overset{*}{S}$, donne bien (25).

exemple, on a des équations de forme

$$\varphi(x) - \int_x^0 f(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = h(x),$$

$$\varphi(y) - \int_0^y \varphi(\xi) f(\xi, y)\,d\xi = h(y),$$

résolues respectivement par

$$\varphi(x) = h(x) - \int_x^0 g(x, \xi)\,h(\xi)\,d\xi,$$

$$\varphi(y) = h(y) - \int_0^y h(\xi)\,g(\xi, y)\,d\xi,$$

exactement comparables à la précédente (7) résolue par (18).

15. Cas où le noyau n'est fonction que de la différence $y - x$. — Il arrive quelquefois que le noyau $f(x, y)$ d'une équation intégrale de l'un des types précédents (21) ou (22) n'est fonction que de la différence $y - x$.

C'est un cas qui se présente en particulier dans la mécanique héréditaire du cycle fermé ([1]).

Il est aisé de vérifier que le *noyau résolvant g est alors de la même forme et peut s'écrire $g(y - x)$*.

Puisque g est formé à partir des puissances de compositions de f, il suffit pour s'en assurer de vérifier que, étant données deux fonctions $f_1(y - x)$ et $f_2(y - x)$, leur produit de composition ne dépend lui aussi que de $y - x$. Or

$$\overset{*}{f_1}\overset{*}{f_2} = \int_x^y f_1(\xi - x) f_2(y - \xi)\,d\xi = \int_0^{y-x} f_1(\tau) f_2(y - x - \tau)\,d\tau,$$

ce qui établit la proposition.

Incidemment notons que, en posant $y - x = t$, la seconde intégrale de la formule précédente s'écrit

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau)\,d\tau$$

([1]) *Cf.* Volterra, [130], p. 52 et 150. *Cf.* aussi [113] de la bibliographie I, Chap. VII. Nous reviendrons sur ce sujet dans le troisième volume du présent Ouvrage.

qui, par un changement de variable évident, s'écrit aussi

$$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)\,d\tau$$

et est donc égal à $\overset{*}{f_2}\overset{*}{f_1}$.

Nous obtenons donc le résultat : *toutes les fonctions de la seule différence $y-x$ sont permutables entre elles.* Nous verrons ultérieurement qu'elles forment un groupe de fonctions permutables donnant *toutes* les fonctions permutables avec l'une d'entre elles, groupe que M. Volterra désigne sous le nom de *groupe du cycle fermé.*

16. Plaçons-nous dans le cas où le noyau $f(y-x)$ est une fonction de la différence $(y-x)$, développable en série entière

$$f(y-x) = A_0 + A_1\frac{(y-x)}{1!} + \ldots + A_n\frac{(y-x)^n}{n!} + \ldots, \tag{26}$$

convergente lorsque $y-x$ est assez petit : on peut alors donner des développements analogues des diverses puissances de composition de f et du noyau résolvant g.

Pour obtenir rapidement ces développements, il suffit de remarquer que, d'après les valeurs (n° 13) des puissances de composition de l'unité, on peut écrire (26)

$$f(y-x) = A_0\overset{*}{1} + A_1\overset{*}{1^2} + \ldots + A_n\overset{*}{1^{n+1}} + \ldots.$$

D'après les remarques du n° 13, les puissances de composition de f se calculeront à partir des puissances de la série

$$A(z) = A_0 z + A_1 z^2 + \ldots + A_n z^n + \ldots, \tag{27}$$

que l'on ordonnera par rapport à z et où l'on remplacera z^p par

$$\frac{(y-x)^{p-1}}{(p-1)!}.$$

Pour la fonction g, nous noterons qu'elle est donnée par

$$g = -\frac{\overset{*}{f}}{\overset{*}{1^0} - \overset{*}{f}};$$

on aura donc à développer suivant les puissances de z le quotient

$$-\frac{A(z)}{1-A(z)}.$$

Soit

(28) $$B_0 z + B_1 z^2 + \ldots + B_n z^{n+1} + \ldots,$$

la série obtenue, il viendra

$$g = B_0 + B_1 \frac{y-x}{1!} + \ldots + B_n \frac{(y-x)^n}{n!} + \ldots.$$

Il convient de noter que la convergence de la série (26), qui a été admise *a priori*, n'entraîne pas nécessairement celle de la série $A(z)$. Si cette dernière série a un rayon de convergence nul, le calcul des puissances de $A(z)$ ou le calcul de $-\frac{A(z)}{1-A(z)}$ sont *purement formels*. Mais les séries obtenues deviennent convergentes quand on y remplace z^i par $\frac{(y-x)^{i-1}}{(i-1)!}$ et elles donnent toujours les puissances de composition de f et le noyau résolvant g.

17. La méthode du numéro précédent peut être commode pour le calcul effectif d'un noyau résolvant.

Dans le même but nous signalerons une méthode due à Evans (¹) et concernant le cas où le noyau $f(x, y)$ vérifie une équation différentielle, par exemple

(29) $$\sum_{0}^{n}{}_i\, a_i(y) \frac{\partial^i f(x, y)}{\partial y^i} = 0.$$

En différentiant l'équation que vérifie le noyau résolvant g

$$f(x, y) + g(x, y) = \int_x^y g(x, \xi) f(\xi, y)\, d\xi,$$

i fois par rapport à y, il vient

(30) $$\frac{\partial^i f}{\partial y^i} + \frac{\partial^i g}{\partial y^i} = \int_x^y g(x, \xi) \frac{\partial^i f(\xi, y)}{\partial y^i}\, d\xi + \sum_{0}^{i-1}{}_s \frac{\partial^s}{\partial y^s} \left\{ g(x, y) \frac{\partial^{i-1-s}}{\partial y^{i-1-s}} f(\xi, y) \right\}_{\xi=y}.$$

(¹) *Cf.* Evans, [26].

Multipliant cette équation par $a_i(y)$ et faisant la somme par rapport à l'indice i, le terme intégral disparaît à cause de (29) et il reste une équation différentielle en $g(x, y)$ qui détermine parfaitement $g(x, y)$ en tenant compte des conditions initiales, pour $y = x$, lesquelles se déduisent des équations (30).

Cette méthode de Evans est particulièrement commode dans le cas du cycle fermé. Si, par exemple,

$$f(x, y) = -\sin(y - x),$$

alors on a

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + f = 0,$$

et le noyau résolvant est, comme on s'en rendra compte aisément,

$$g(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sin \sqrt{2}(y - x).$$

Le cas du cycle fermé a aussi été étudié par Whittaker ([1]).

Tedone a enfin envisagé le problème ([2]) de déterminer les noyaux $f(x, y)$ dont les résolvants peuvent être calculés au moyen d'opérations élémentaires et d'opération de différentiation et d'intégration.

18. Cas des intégrales multiples. — Des considérations tout à fait analogues s'appliqueront à une équation du type suivant ([3])

$$(31)\quad \begin{aligned} &\varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n) \\ &\quad -\int_0^{y_1} d\xi_1 \ldots \int_0^{y_n} d\xi_n\, \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_n) f(\xi_1, \ldots, \xi_n \,|\, y_1, \ldots, y_n) \\ &\quad = h(y_1, y_2, \ldots, y_n). \end{aligned}$$

La fonction inconnue φ dépend maintenant de n variables et l'intégrale simple qui figurait dans (7) est remplacée par une intégrale multiple *à limites variables*.

En reprenant le mode de calcul du n° 8 on établira, pour (31) trois principes de *convergence*, de *réciprocité*, *d'inversion* qui en résument la théorie. On pourra d'ailleurs introduire une *nouvelle*

([1]) *Cf* WHITTAKER, [135] et aussi VOLTERRA et PÉRÈS, [133] p. 112.
([2]) *Cf.* TEDONE, [108]; VOLTERRA. [131].
([3]) VOLTERRA, [125].

notion de composition, définie par

$$\overset{**}{fg} = \int_{x_1}^{y_1} d\xi \ldots \int_{x_n}^{y_n} d\xi_n f(x_1, x_2, \ldots, x_n \mid \xi_1, \ldots, \xi_n) g(\xi_1, \ldots, \xi_n \mid y_1, \ldots, y_n)$$

et en faire le même emploi que plus haut.

III. — ÉQUATION DE VOLTERRA DE PREMIÈRE ESPÈCE.

19. Nous la prendrons sous la forme

$$(32) \qquad \int_0^y \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = f(y),$$

l'inconnue étant $\varphi(y)$. La fonction $f(y)$ est donnée dans l'intervalle

$$0 \leqq y \leqq l,$$

intervalle dans lequel on cherche également φ. Le *noyau* $K(x, y)$ est donné pour

$$0 \leqq x \leqq y \leqq l.$$

Nous nous limitons d'abord aux fonctions bornées et continues, mais nous aurons de plus à introduire l'hypothèse de l'existence de certaines dérivées.

Le système d'équations linéaires correspondant à (32) s'obtient, comme au n° 6, en subdivisant l'intervalle (o, e) en intervalles partiels $h_1, h_2, \ldots h_n$ et, en reprenant les notations du n° 6, il s'écrit

$$(32') \qquad \left\{ \begin{array}{r} \varphi_1 A_{1,1} = f_1, \\ \varphi_1 A_{1,2} + \varphi_2 A_{2,2} = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_1 A_{1,n} + \varphi_2 A_{2,n} + \ldots + \varphi_n A_{n,n} = f_n. \end{array} \right.$$

Il est possible de le traiter comme le système correspondant à l'équation de seconde espèce, mais son déterminant est

$$A_{11} \quad A_{22} \quad \ldots \quad A_{nn}$$

de sorte que nous sommes amenés à faire d'abord, sur le noyau K, l'hypothèse $K(y, y) \neq 0$. Dans cette hypothèse on peut procéder, comme au paragraphe précédent.

20. Le cas simple où $K(y, y)$ ne s'annule pas. — On peut alors, sous des restrictions de dérivabilité, passer de la solution du système algébrique à celle de l'équation intégrale ([1]).

Transformons en effet le système (32) en retranchant de chaque équation la précédente ; la $i^{\text{ième}}$ équation du système s'écrit

$$\varphi_1(A_{1,i} - A_{1,i-1}) + \varphi_2(A_{2,i} - A_{2,i-1}) + \ldots + \varphi_i A_{i,i} = f_i - f_{i-1},$$

or, les différences $(A_{r,i} - A_{r,i-1})$ et $(f_i - f_{i-1})$ font intervenir à la limite les dérivées $K'_y(x, y)$ et $f'_y(y)$ et, en divisant l'équation précédente par $A_{i,i}(x_i - x_{i-1})$, il apparaît que l'on pourra transformer le système (32') en le système analogue concernant l'équation de seconde espèce

$$\varphi(y) + \int_0^y \varphi(\xi) \frac{\dfrac{\partial K(\xi, y)}{\partial y}}{K(y, y)} d\xi = \frac{f_y(y)}{K(y, y)}.$$

Cette dernière équation doit pouvoir remplacer la proposée.

Il est facile de le vérifier directement ([2]). Admettons que, dans le domaine considéré, les dérivées $K'_y(x, y)$ et $f'_y(y)$ existent et soient bornées et continues. L'équation entraîne nécessairement

$$f(0) = 0$$

et, cette condition étant remplie, elle est équivalente à celle que l'on en déduit par dérivation par rapport à y, à savoir

$$(33) \qquad K(y, y)\varphi(y) + \int_0^y \varphi(\xi) K'_y(\xi, y)\, d\xi = f'_y$$

ou encore

$$(33') \qquad \varphi(y) + \int_0^y \varphi(\xi) \frac{\dfrac{\partial K(\xi, y)}{\partial y}}{K(y, y)} d\xi = \frac{f'_y(y)}{K(y, y)};$$

c'est là une équation de seconde espèce.

Si $K(y, y)$ ne s'annule pas dans le domaine de variation de y, cette équation a son noyau et son second membre bornés et continus

---

([1]) C'est ce qu'a fait M. Volterra dans ses premières recherches sur la question, [123] Note I, obtenant ainsi les formules d'inversion données plus bas et vérifiant directement, après avoir étudié la convergence des séries qui y interviennent, l'existence et l'unicité de la solution.

([2]) VOLTERRA [124].

et les méthodes du paragraphe II en donnent la solution. Posant, pour abréger,

$$H(x, y) = -\frac{\frac{\partial K(x, y)}{\partial x}}{K(y, y)},$$

$$h(y) = \frac{f'_y(y)}{K(y, y)},$$

puis

$$S(x, y) = -(\overset{\star}{H} + \overset{\star}{H}{}^2 + \ldots + \overset{\star}{H}{}^n + \ldots),$$

on aura

$$\varphi(y) = h(y) - \int_0^y h(\eta) S(\eta, y)\, d\eta,$$

formule donnant la solution, unique, de (32).

Au lieu de dériver (32), on peut aussi y prendre pour inconnue

$$\theta(y) = \int_0^y \varphi(t)\, dt$$

et l'écrire, après une intégration par parties,

$$(34) \qquad K(y, y)\theta(y) - \int_0^y \theta(\xi) K'_\xi(\xi, y)\, d\xi = f(y),$$

d'où

$$(34') \qquad \theta(y) - \int_0^y \theta(\xi) \frac{K'_\xi(\xi, y)}{K(y, y)}\, d\xi = \frac{f(y)}{K(y, y)},$$

tout à fait analogue à (33'); on en tirera $\theta(y)$, puis, par dérivation, on obtiendra la fonction $\varphi(y)$.

21. Nous reviendrons ultérieurement (Chap. VII, § II) sur le cas où $K(y, y)$ à des zéros isolés. Plaçons-nous dans l'hypothèse que $K(y, y)$ est *identiquement nul.* L'analyse précédente est alors en défaut, l'équation (33) se réduisant à

$$(33_1) \qquad \int_0^y \varphi(\xi) K'_y(\xi, y)\, d\xi = f'_y(y),$$

qui est du même type que (32). Mais on pourra recommencer sur elle le raisonnement qui nous avait permis de passer de (32) à (33); il est bien clair que l'on sera amené ainsi, sous des conditions assez larges, à la solution de l'équation proposée.

Admettons en effet, pour fixer les idées, que le noyau $K(x, y)$ soit identiquement nul pour $y = x$ ainsi que les dérivées successives K'_{y}, K''_{y^2}, ..., $K^{(n-1)}_{y^{n-1}}$, la dérivée suivante $K^{(n)}_{y^n}(x, y)$ n'étant jamais nulle pour $x = y$; supposons de plus que $K^{(n+1)}_{y^{n+1}}(x, y)$ soit bornée et continue. Dans ces conditions, l'équation (32) ne peut admettre de solution que si le second membre donné $f(y)$ a des dérivées finies et continues jusqu'à l'ordre $n + 1$ inclus; on devra avoir de plus

$$f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(n)}_{y^n}(0) = 0;$$

et, ces conditions étant remplies, on passera, par $n + 1$ dérivations par rapport à y, de l'équation (32) à l'équation équivalente

$$(35) \qquad \left(\frac{\partial^n K}{\partial y^n}\right)_{y=x} \varphi(y) + \int_0^y \varphi(\xi) \frac{\partial^{n+1} K(\xi, y)}{\partial y^{n+1}} d\xi = f^{(n+1)}_{y^{n+1}}(y),$$

tout à fait analogue à (33) et qui donnera la fonction $\varphi(y)$ cherchée, d'ailleurs *unique*.

22. Le symbole $\overset{*}{K}{}^{-1}$. — Dans ce qui précède la limite inférieure d'intégration zéro peut être remplacée par une constante ou même par un paramètre x qui figurera aussi dans la donnée f et dans l'inconnue φ.

L'équation (32) s'écrit alors

$$(36) \qquad \int_x^y \varphi(x, \xi) K(\xi, y) d\xi = f(x, y)$$

ou encore

$$\overset{*}{\varphi} \overset{*}{K} = \overset{*}{f},$$

les données K et f étant des fonctions de x et y définies par exemple dans le domaine

$$a \leq x \leq y \leq b;$$

la fonction $f(x, y)$ doit être identiquement nulle pour $y = x$ et, en supposant que $K(y, y)$ ne s'annule jamais on sera amené à l'équation de deuxième espèce

$$\varphi(x, y) + \int_x^y \varphi(x, \xi) \frac{K'_y(\xi, y)}{K(y, y)} d\xi = \frac{f'_y(x, y)}{K(y, y)}.$$

Dans tous les cas on peut écrire symboliquement la solution de (36) sous la forme

$$\overset{*}{\varphi} = \overset{*}{f} \overset{*}{K}{}^{-1},$$

l'analyse précédente définissant en somme (sous les restrictions posées) l'opérateur $\overset{\star}{K}^{-1}$.

On traiterait de même

$$(37)\qquad \int_x^y K(x,\xi)\varphi(\xi,y)\,d\xi = f(x,y)$$

ou

$$\overset{\star}{K}\overset{\star}{\varphi} = f$$

que l'on ramènera à la seconde espèce en dérivant par rapport à x, et sa solution pourra se noter symboliquement

$$\varphi = \overset{\star}{K}^{-1}\overset{\star}{f}.$$

La question se pose de savoir si c'est le même symbole $\overset{\star}{K}^{-1}$ qui doit servir, par composition à droite ou à gauche de f, à résoudre les deux équations *associées* (36) et (37). *La réponse est affirmative* comme nous le verrons quand nous aurons donné les représentations et les règles de calcul des symboles en question ([1]).

23. Il est facile de ramener au type (32) des équations de forme un peu différente. Soit par exemple, l'équation

$$(38)\qquad \int_0^{f(y)} \varphi(\xi)K(\xi,y)\,d\xi = F(y),$$

où l'inconnue est toujours $\varphi(y)$ ([2]).

Posons $f(y) = x$ et admettons que l'on en puisse tirer, de façon univoque, $y = g(x)$, l'équation (38) s'écrira

$$(38')\qquad \int_0^x \varphi(\xi)K\big(\xi, g(x)\big)\,d\xi = F\big(g(x)\big),$$

de même forme que (32).

24. Équation de première espèce où figurent des intégrales multiples. — Nous avons vu plus haut (n° 18) que la méthode de résolution des équations de deuxième espèce s'étend immédiatement

---

([1]) Pérès, [76]; Volterra et Pérès [133], p. 40 et 106.

([2]) Volterra, [126].

au cas des intégrales multiples. Pour le cas d'une équation de première espèce, la même extension est possible ([1]), mais les calculs sont un peu plus compliqués.

Bornons-nous au cas de deux variables (l'analyse étant analogue pour le cas général) et soit l'équation

$$(39)\qquad \int_0^{y_1} d\xi_1 \int_0^{y_2} d\xi_2\, \varphi(\xi_1, \xi_2)\, K(\xi_1, \xi_2 \mid y_1, y_2) = f(y_1, y_2)$$

avec l'inconnue $\varphi(y_1, y_2)$. Il est naturel de dériver (39) par rapport à y_1 et à y_2 pour la transformer en une équation de seconde espèce. Après ces deux dérivations, il vient

$$(40)\qquad \begin{aligned} & K(y_1, y_2 \mid y_1, y_2)\, \varphi(y_1, y_2) \\ & + \int_0^{y_1} \varphi(\xi_1, y_2) \frac{\partial K}{\partial y_1}(\xi_1, y_2 \mid y_1, y_2)\, d\xi_1 \\ & + \int_0^{y_2} \varphi(y_1, \xi_2) \frac{\partial K}{\partial y_2}(y_1, \xi_2 \mid y_1, y_2)\, d\xi_2 \\ & + \int_0^{y_1} d\xi_1 \int_0^{y_2} d\xi_2\, \varphi(\xi_1, \xi_2) \frac{\partial^2 K(\xi_1, \xi_2 \mid y_1, y_2)}{\partial y_1\, \partial y_2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y_1\, \partial y_2}, \end{aligned}$$

équivalente à (39) si, comme il est nécessaire, $f(y_1, y_2)$ est nulle pour $y_1 = 0$ et pour $y_2 = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y_1}$ et $\frac{\partial f}{\partial y_2}$ étant respectivement nulles pour $y_2 = 0$ et $y_1 = 0$.

En admettant que $K(y_1, y_2 \mid y_1, y_2)$ n'est jamais nul, (40) prend la forme

$$(41)\qquad \begin{aligned} \varphi(y_1, y_2) & + \int_0^{y_1} \varphi(\xi_1, y_2)\, F(\xi_1; y_1, y_2)\, d\xi_1 \\ & + \int_0^{y_2} \varphi(y_1, \xi_2)\, G(\xi_2; y_1, y_2)\, d\xi_2 \\ & + \int_0^{y_1} d\xi_1 \int_0^{y_2} \varphi(\xi_1, \xi_2)\, H(\xi_1, \xi_2; y_1, y_2)\, d\xi_2 = h(y_1, y_2), \end{aligned}$$

F, G, H, h ayant des valeurs évidentes. C'est une équation où la fonction inconnue figure dans des intégrales simples et dans une intégrale double.

On peut appliquer à (41) la méthode des approximations successives en isolant le terme $\varphi(y_1, y_2)$.

([1]) VOLTERRA, [125].

On peut aussi procéder de la façon suivante : conservons les deux premiers termes à gauche et faisons passer les autres au second membre que nous désignerons alors par $T(y_1, y_2)$. Il vient

$$\varphi(y_1, y_2) + \int_0^{y_1} F(\xi_1; y_1, y_2)\,\varphi(\xi_1, y_2)\,d\xi_1 = T(y_1, y_2).$$

Si nous envisageons y_2 comme un paramètre et $T(y_1, y_2)$ comme connu, c'est une équation ordinaire de seconde espèce dont on tirera

$$\varphi(y_1, y_2) = T(y_1, y_2) + \int_0^{y_1} T(\xi_1, y_2)\,\mathcal{F}(\xi_1; y_1, y_2)\,d\xi_1$$

$\mathcal{F}$ étant le noyau résolvant de F. Remplaçons T par sa valeur, nous obtenons une équation de même type que (41) mais où a disparu la première intégrale

$$(41') \quad \varphi(y_1, y_2) + \int_0^{y_2} \varphi(y_1, \xi_2)\,G_1(\xi_2; y_1, y_2)\,d\xi_2 + \int_0^{y_1} d\xi_1 \int_0^{y_2} d\xi_2\,H_1(\xi_1, \xi_2; y_1, y_2)\,\varphi(\xi_1, \xi_2) = h_1(y_1, y_2).$$

En procédant de même après avoir isolé les deux premiers termes de (41′), on aboutit à

$$(41'') \quad \varphi(y_1, y_2) + \int_0^{y_1} d\xi_1 \int_0^{y_2} d\xi_2\,H_2(\xi_1, \xi_2; y_1, y_2)\,\varphi(\xi_1, \xi_2) = h_2(y_1, y_2),$$

qui est du type (31) (n° 18).

Dans le cas où il n'y a pas deux mais n variables, il faudra dériver l'équation une fois par rapport à chaque variable. On aura ainsi une relation où figurent des intégrales simples et multiples jusqu'à l'ordre n. Pour la traiter on pourra éliminer les diverses intégrales par des calculs tout à fait semblables au précédent.

IV. — SYSTÈMES D'ÉQUATIONS DE VOLTERRA [1].

25. Nous prendrons d'abord le système *de deuxième espèce*

$$(42) \quad \varphi_i(y) + \int_0^{y} \sum_{1}^{n}{}_j\, \varphi_j(\xi)\,K_{ji}(\xi, y)\,d\xi = f_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

(1) Volterra, [124].

où les inconnues sont les n fonctions $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$. On peut appliquer à ce système une méthode analogue à celle des n°s 5-9 en faisant dépendre encore sa solution de trois principes *de convergence*, *de réciprocité*, *d'inversion*.

Construisons les fonctions suivantes :

$$(43)\quad \begin{cases} K_{ji}^{(1)}(x, y) = -K_{ji}(x, y) & (i, j = 1, 2, \ldots, n), \\ K_{ji}^{(l)}(x, y) = \sum_{1}^{n} {}_r \overset{*}{K}{}_{jr}^{s} \overset{*}{K}{}_{ri}^{l-s}(x, y) & (l = 2, 3, \ldots, \infty). \end{cases}$$

Il est facile de vérifier que le second membre ne dépend pas du choix de s ($s = 1, 2, \ldots l-1$) et que

$$|K_{ji}^{(l)}(x, y)| < n^{l-1} M^l \frac{|y-x|^{l-1}}{(l-1)!};$$

en désignant par M un nombre supérieur à $|K_{ji}(x, y)|$ quels que soient i et j pour x et y arbitraires dans le champ

$$0 \leqq x \leqq y \leqq l,$$

où nous nous plaçons.

Il en résulte que les séries

$$(44)\quad S_{ji}(x, y) = \sum_{1}^{\infty} {}_l K_{ji}^{(l)}(x, y)$$

sont *absolument et uniformément convergentes dans le champ envisagé et définissent n^2 fonctions bornées* S_{ji}. C'est le *principe de convergence*.

En étudiant la forme des restes de ces séries, on constate, tout à fait comme dans le cas d'une seule équation, que

$$S_{ji}(x, y) + K_{ji}(x, y) = -\sum_{1}^{n} {}_r \overset{*}{S}_{jr} \overset{*}{K}_{ri}(x, y)$$
$$= -\sum_{1}^{n} {}_r \overset{*}{K}_{jr} \overset{*}{S}_{ri}(x, y)$$

et que, en posant

$$(43')\quad \begin{cases} S_{ji}^{(1)}(x, y) = -S_{ji}(x, y), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ S_{ji}^{(l)}(x, y) = \sum_{1}^{n} {}_r \overset{*}{S}{}_{jr}^{(s)} \overset{*}{S}{}_{ri}^{(l-s)}(x, y), \end{cases}$$

on a

$$(44') \qquad K_{ji}(x, y) = \sum_{1}^{\infty}{}_l S_{ji}^{(l)}(x, y),$$

c'est le *principe de réciprocité*.

Enfin, par des calculs analogues à ceux du n° **8**, III, il viendra

$$\int_0^y \sum_l \big(\varphi_l(\eta) - f_l(\eta)\big) S_{lh}(\eta, y)\, d\eta$$
$$= \int_0^y \sum_l \varphi_l(\xi) \big(S_{lh}(\xi, y) + K_{lh}(\xi, y)\big)\, d\xi,$$

d'où en simplifiant,

$$\int_0^y \sum_l f_l(\xi) S_{lh}(\xi, y)\, d\xi$$
$$= -\int_0^y \sum_l \varphi_l(\xi) K_{lh}(\xi, y)\, d\xi = \varphi_h(y) - f_h(y),$$

c'est-à-dire que l'inversion du système d'équations intégrales (42) sera nécessairement donné par le système des équations

$$(42') \qquad \varphi_i(y) = f_i(y) + \int_0^y \sum_{1}^{n}{}_j f_j(\xi) S_{ji}(\xi, y)\, d\xi.$$

La réciproque est évidente par un calcul analogue et l'on a ainsi le *principe d'inversion*.

26. On peut passer à un système de *première espèce* ayant la forme

$$(45) \qquad f_i(y) = \int_0^y \sum_{1}^{n}{}_j \varphi_j(\xi) K_{ji}(\xi, y)\, d\xi \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les φ_j étant toujours les inconnues et les données f_i et K_{ji} étant dérivables par rapport à y. Le système (45) entraîne $f_i(0) = 0$ et est alors équivalent au système des équations dérivées par rapport à y, à savoir

$$(46) \qquad \sum_{1}^{n}{}_j \varphi_j(y) K_{ji}(y, y) + \int_0^y \sum_{0}^{n}{}_j \frac{\partial K_{ji}(\xi, y)}{\partial y} \varphi_j(\xi)\, d\xi = f_i'(y).$$

Désignons par $D(x, y)$ le déterminant

$$D(x, y) = \begin{vmatrix} K_{11}(x, y) & K_{12}(x, y) & \dots & K_{1n}(x, y) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}(x, y) & K_{n2}(x, y) & \dots & K_{nn}(x, y) \end{vmatrix}.$$

Si $D(x, x)$ est différent de zéro on pourra résoudre les (46) par rapport aux $\varphi_j(y)$ qui figurent dans la première somme du membre gauche. On obtiendra ainsi des équations exactement analogues aux (42) et qui se traiteront par la méthode qui vient d'être donnée.

27. Cas des intégrales multiples. — Prenons par exemple le système de première espèce

$$(47) \quad \int_0^{y_1} d\xi_1 \dots \int_0^{y_p} d\xi_p \sum_1^n {}_j \varphi_j(\xi_1, \dots, \xi_p) K_{ij}(\xi_1, \dots, \xi_p | y_1, \dots, y_p) = f_i(y_1, \dots, y_p) \qquad (i = 1, 2, \dots, n)$$

(inconnues φ_j). Nous dériverons successivement par rapport à y_1, y_2, ..., y_p. Si le déterminant des fonctions $K_{ij}(x_1, \dots, x_p | y_1, \dots, y_p)$, soit

$$(48) \qquad D(x_1, x_2, \dots, x_p | y_1, \dots, y_p) = \begin{vmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1} & \dots & \dots & K_{nn} \end{vmatrix},$$

où l'on fait $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, ... $x_p = y_p$, n'est pas nul, les équations (47) entraînent

$$(49) \qquad \varphi_i(y_1, y_2, \dots, y_p) + \mathcal{F}_i[\varphi_1, \dots, \varphi_n] = h_i(y_1, \dots, y_n),$$

où $\mathcal{F}_i$ représente une somme d'intégrales simples, doubles, multiples qui contiennent linéairement les inconnues. Supposant connues $\varphi_2, \dots, \varphi_n$, on tirera φ_1 de la première équation (49) par la méthode du n° 24, puis on portera cette valeur dans les équations restantes qui ne contiendront plus que φ_2, ..., φ_n. En continuant ainsi on se ramènera à une seule équation avec une seule inconnue.

Ce qui précède indique aussi la marche à suivre si le système est de deuxième espèce.

V. — LIEN ENTRE LES ÉQUATIONS DE VOLTERRA ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

28. Partons, pour fixer les idées, de l'équation de première espèce

$$(50) \qquad \int_a^y \varphi(\xi) f(\xi, y)\, d\xi = h(y) \qquad \big(h(a) = 0\big),$$

où l'inconnue est $\varphi(y)$ et, en supposant finies et continues les dérivées dont nous aurons besoin, reprenons les dérivations successives qui nous ont servi pour traiter l'équation lorsque le noyau [ici $f(x, y)$] est identiquement nul pour $y = x$ (n° 21); nous obtenons les équations suivantes :

$$(50_1) \qquad \varphi(y) f(y, y) + \int_a^y \varphi(\xi) f'_y(\xi, y)\, d\xi = h'(y),$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

$$(50_{n+1}) \qquad \frac{d^n}{dy^n}\big(\varphi(y) f(y, y)\big) + \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\big(\varphi(y) f'_y(y, y)\big) + \dots$$
$$+ \varphi(y) f^{(n)}_{y^n}(y, y) + \int_a^y \varphi(\xi) f^{(n+1)}_{y^{n+1}}(\xi, y)\, d\xi = h^{(n+1)}(y) \quad [1]$$

et (50) est visiblement équivalente à l'équation (*intégro-différentielle*) (50_{n+1}) pourvu que l'on y joigne les conditions déduites des précédentes (50_1), ..., (50_n) en y faisant $y = a$. Lorsque $f(a, a)$ n'est pas nul ces conditions déterminent les valeurs, pour $y = a$ de φ et de ses n premières dérivées; l'étude de l'équation (50_{n+1}) avec ces conditions aux limites est un problème équivalent à la résolution de l'équation (50).

29. Dans le cas particulier où $f(x, y)$ est un polynome en y de degré n, l'intégrale qui figure dans (50_{n+1}), disparaît et la résolu-

---

[1] Ici, et aussi dans la suite, des notations telles que $f'_y(y, y)$, $f^{(n)}_{y^n}(y, y)$ désignent les dérivées partielles $f'_y(x, y)$, $f^{(n)}_{y^n}(x, y)$ dans lesquelles on a remplacé x par y.

tion de (50) se réduit à l'intégration de l'équation *différentielle*

$$(51)\quad \frac{d^n}{dy^n}\big(\varphi(y)f(y,y)\big)+\frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}\big(\varphi(y)f'_y(y,y)\big)+\ldots$$
$$+\varphi(y)f^{(n)}_{y^n}(y,y)=h^{(n+1)}(y)$$

avec les données aux limites usuelles pour $y=a$.

Si le noyau f est un polynome en x de degré n, on aura un résultat analogue. On peut écrire

$$f(x,y)=f(y,y)+\frac{x-y}{1!}f'_x(y,y)+\ldots+\frac{(x-y)^n}{n!}f^{(n)}_{x^n}(y,y)$$

et, en portant cette expression dans l'équation (50) et introduisant la fonction

$$\psi(y)=\int_a^y\varphi(\zeta)\frac{(y-\zeta)^n}{n!}\,d\zeta,$$

on est ramené à l'équation différentielle en ψ

$$(52)\quad f(y,y)\psi^{(n)}-f'_x(y,y)\psi^{(n-1)}+\ldots+(-1)^n f^{(n)}_{x^n}(y,y)\psi=h(y),$$

dont on devra chercher une solution nulle pour $y=a$ ainsi que ses dérivées ψ', ..., $\psi^{(n)}$; on passera ensuite à $\varphi(y)$ par $(n+1)$ dérivations.

30. Il est clair que des remarques analogues vaudront pour les équations de Volterra de seconde espèce.

Inversement d'ailleurs la détermination de l'intégrale d'une équation différentielle

$$(53)\qquad A_0(y)\frac{d^n\varphi}{dy^n}+A_1(y)\frac{d^{n-1}\varphi}{dy^{n-1}}+\ldots+A_n(y)\varphi=H(y)$$

qui, pour $y=a$, prend des valeurs assignées ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre $n-1$, revient à la résolution d'une équation intégrale de Volterra, que l'on déduira de (53) par n ou $(n+1)$ intégrations [1] successives entre les limites a et y et en faisant disparaître les dérivées de φ par des intégrations par parties.

Tout ceci s'étend à des systèmes d'équations différentielles : on passe alors à des systèmes d'équations de Volterra [2]. Prenons par

---

[1] Suivant que l'on veut obtenir une équation de deuxième ou de première espèce.

[2] *Cf.* SINIGALLIA, [104'].

exemple le système

$$\frac{d\varphi_i}{dy} + \sum_k a_{ik}(y)\,\varphi_k(y) = f_i(y)$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

une intégration donnera le système de Volterra de deuxième espèce

$$\varphi_i(y) + \int_a^y \sum_k a_{ik}(\xi)\,\varphi_k(\xi)\,d\xi = \varphi_i(a) + \int_a^y f_i(\xi)\,d\xi.$$

Des considérations analogues s'appliquent enfin à des équations aux dérivées partielles ou à des systèmes de telles équations, pris avec des données aux limites convenables. Sans qu'il soit besoin d'insister, on voit que de très nombreux problèmes de l'analyse pourront se ramener à des équations intégrales de Volterra.

31. Nous avons vu que dans des cas particuliers (noyau polynome de degré n en x ou en y) on pouvait ramener l'équation de Volterra à une équation différentielle d'ordre n. Il est à prévoir que, dans le cas général, l'équation de Volterra pourra être rattachée à une équation différentielle d'ordre infini. Nous nous contenterons sur ce sujet d'indications très rapides (¹).

L'idée la plus naturelle consiste à envisager une équation différentielle d'ordre infini comme étant du type

$$(54) \qquad A_0(y)\varphi + A_1(y)\frac{d\varphi}{dy} + \ldots + A_p(y)\frac{d^p\varphi}{dy^p} + \ldots = h(y),$$

où le premier membre est une série. Une telle équation peut être remplacée par le système suivant :

$$(54') \quad \left\{ \begin{array}{l} A_0(y)\,\varphi_0(y) + A_1(y)\,\varphi_1(y) + \ldots + A_p(y)\,\varphi_p(y) + \ldots = h(y), \\ \dfrac{d\varphi_q}{dy} = \varphi_{q+1}(y) \qquad (q = 0, 1, \ldots, \infty) \end{array} \right.$$

avec $\varphi(y) = \varphi_0(y)$.

L'équation intégrale de Volterra (50), où l'on suppose le noyau $f(x, y)$ analytique et donné par la série

$$\sum_0^\infty{}_p (-1)^p \frac{(y-x)^p}{p!} f_{x^p}^{(p)}(y, y)$$

(¹) Pour plus de détails, *Cf.* Lalesco, [55].

s'écrira (*Cf.* n° 29)

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{p} (-1)^p \frac{\partial^p f(y, y)}{\partial x^p} \int_a^y \varphi(\xi) \frac{(y-\xi)^p}{p!} d\xi = h(y)$$

et pourra donc être remplacée par le système

$$(55) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_{0}^{\infty}{}_{p} (-1)^p f_{x^p}^{(p)}(y, y)\, \varphi_p(y) = h(y), \\ &\frac{d\varphi_0(y)}{dy} = \varphi(y), \\ &\frac{d\varphi_p(y)}{dy} = \varphi_{p-1}(y) \qquad (p = 1, 2, \ldots, \infty), \end{aligned} \right.$$

les φ_p étant nulles pour $y = a$.

Il est impossible de ramener le système (55) au type précédent (54'); il y a pourtant entre eux une analogie formelle de sorte qu'il est très naturel de dire que (55) représente aussi une extension, pour l'ordre infini, de la notion d'équation différentielle d'ordre fini. Nous avons ainsi, de cette notion, deux généralisations différentes et *c'est la seconde qui se relie à l'étude des équations de Volterra.*

CHAPITRE VII.

COMPLÉMENTS AUX RÉSULTATS PRÉCÉDENTS. AUTRES TYPES D'ÉQUATIONS DE VOLTERRA.

I. — NOYAUX INFINIS POUR $y = x$.

1. Dans tout le Chapitre VI nous avons supposé que les fonctions considérées (et aussi leurs dérivées, lorsqu'il était nécessaire) étaient *bornées* et *continues*. Il est naturel de se limiter à ce cas dans une première étude afin de dégager, sans complications accessoires, les méthodes essentielles. Mais il convient d'examiner ensuite si ces méthodes restent valables avec des hypothèses plus larges.

Il est tout d'abord évident que la condition de continuité est tout à fait accessoire. On pourra admettre que les fonctions envisagées ont des discontinuités pourvu que les intégrales que l'on est amené à écrire gardent un sens et pourvu que, *les noyaux restant bornés*, on ait, pour leurs puissances de composition, les limitations qui ont permis d'établir le principe de convergence.

Passons au cas de noyaux non bornés. Un type particulièrement intéressant pour les applications est celui des noyaux qui deviennent infinis pour $y = x$ comme $(y - x)^{\alpha-1}$, α étant un nombre compris entre 0 et 1. Mais, avant d'en aborder l'étude, nous rappellerons quelques notions qui se rapportent à la théorie de la composition et dont nous aurons besoin.

2. *Ordre et diagonale d'une fonction $f(x, y)$.* — Soit une fonction $f(x, y)$ définie dans un champ tel que

(D) $$a \leqq x \leqq y \leqq b.$$

M. Volterra dit (¹) qu'elle est d'ordre α (α étant un nombre positif) si l'on peut y mettre en facteur $(y - x)^{\alpha-1}$, le quotient étant une fonc-

---

(¹) *Cf.* [133], p. 10.

tion de x et de y finie et continue dans (D) et non identiquement nulle pour $y = x$. En introduisant, pour la commodité, un dénominateur $\Gamma(\alpha)$, où Γ est la fonction eulérienne de deuxième espèce, une fonction d'ordre α s'écrira

$$f(x, y) = \frac{(y - x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} F(x, y), \tag{1}$$

$F(x, y)$ étant finie et continue et $F(x, x) \not\equiv 0$. $F(x, y)$ sera dit *caractéristique* de f, $F(x, x)$ en sera la *diagonale*. La fonction f n'est bornée que si $\alpha \geqq 1$. Pour $0 < \alpha < 1$ elle devient infinie pour $y = x$.

Soit une autre fonction d'ordre positif β

$$g(x, y) = \frac{(y - x)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} G(x, y), \tag{2}$$

la composition $\overset{**}{fg}$ garde évidemment un sens, même si α et β sont compris entre 0 et 1 et l'on a

$$\overset{**}{fg} = \int_x^y \frac{(\xi - x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \frac{(y - \xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)} F(x, \xi) G(\xi, y)\, d\xi,$$

d'où, par un changement de variables évident,

$$\overset{**}{fg} = \frac{(y - x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha + \beta)} H(x, y) \tag{3}$$

avec

$$H(x, y) = \frac{\Gamma(\alpha + \beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} \times \int_0^1 F\big(x, x + t(y - x)\big) G\big(x + t(y - x), y\big) t^{\alpha-1}(1 - t)^{\beta-1}\, dt. \tag{4}$$

On voit imммédiatement que :

a. Les règles de calcul du Chapitre VI, n° 12, s'appliquent même si les ordres sont inférieurs à 1, pourvu qu'ils restent positifs;

b. $\overset{**}{fg}$ a pour ordre la somme $\alpha + \beta$;

c. $\overset{**}{fg}$ a pour diagonale le produit $F(x, x)G(x, x)$ des diagonales de f et g [1];

---

[1] Ceci résulte de l'évaluation connue de l'intégrale eulérienne de première espèce

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}(1 - t)^{\beta-1} dt = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha + \beta)}.$$

d. Si dans le champ considéré on a $|F| < M$, $|G| < N$, on a l'inégalité

$$(5) \qquad \left|\overset{*}{f}\overset{*}{g}\right| < \frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)} MN.$$

3. Puissances quelconques de l'unité. — Nous avons vu (Chap. III, n° 13) que, pour z entier positif, on a

$$\overset{*}{1}{}^{z} = \frac{(y-x)^{z-1}}{(z-1)!} = \frac{(y-x)^{z-1}}{\Gamma(z)}.$$

Mais, z et z' étant positifs quelconques, la formule

$$(6) \qquad \overset{*}{1}{}^{z}\overset{*}{1}{}^{z'} = \overset{*}{1}{}^{z+z'},$$

qui est évidente pour les valeurs entières, subsiste d'après ce qui précède. Il est donc naturel de poser, *par définition de* $\overset{*}{1}{}^{z}$, pour z positif quelconque,

$$(7) \qquad \overset{*}{1}{}^{z} = \frac{(y-x)^{z-1}}{\Gamma(z)} \quad (^1).$$

4. Équation de seconde espèce dont le noyau est d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$. — Ce sera par exemple l'équation

$$(8) \qquad \varphi(x,y) - \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}(x,y) = h(x,y)$$

[inconnue $\varphi(x,y)$] ou bien, en prenant pour fixer les idées x et a nuls,

$$(8') \qquad \varphi(y) - \int_0^y \varphi(\xi) f(\xi,y)\,d\xi = h(y)$$

[inconnue $\varphi(y)$]. Le noyau f est donné par (1) avec $0 < \alpha < 1$; il est donc infini pour $y = x$ d'ordre $1-\alpha$.

D'après (5), on a

$$\left|\overset{*}{f}{}^{n}\right| < \frac{(y-x)^{n\alpha-1}}{\Gamma(n\alpha)} M^n$$

et la série

$$-\left(f + \overset{*}{f}{}^{2} + \overset{*}{f}{}^{3} + \ldots + \overset{*}{f}{}^{n} + \ldots\right),$$

---

(1) La formule (7) peut d'ailleurs être justifiée par application de la théorie de M. Volterra concernant les puissances quelconques de composition ([133], Chap. V). Nous y reviendrons, nous contentant pour le moment des remarques du texte.

dont le terme général est d'ailleurs une fonction finie et continue dès que n dépasse la partie entière de $\frac{1}{\alpha}$ est donc uniformément et absolument convergente. Elle définit le noyau résolvant g et la relation fondamentale

$$f + g = \overset{*}{f}\overset{*}{g} = \overset{*}{g}\overset{*}{f}$$

subsiste, donc aussi la solution donnée au Chapitre VI.

5. **Cas d'une équation de première espèce.** — Nous l'écrirons

$$(9) \qquad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}(x, y) = h(x, y)$$

ou bien

$$(9') \qquad \int_0^y \varphi(\xi) f(\xi, y)\, d\xi = h(y).$$

Les cas traités précédemment sont les suivants : *noyau du premier ordre* (n° **20**) et *noyau d'ordre entier quelconque* (n° **21**). Nous allons envisager le cas où le noyau est *d'ordre positif quelconque* (¹).

Prenons d'abord pour le noyau f l'expression précédente (1) avec, toujours, $0 < \alpha < 1$.

Nous remplacerons l'équation (9) par une équation équivalente dont le noyau est du premier ordre. Il suffit d'en composer à droite les deux membres par une fonction d'ordre $1 - \alpha$, par exemple

$$\overset{*}{1}^{1-\alpha} = \frac{(y-x)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}.$$

On passe ainsi à

$$(10) \qquad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f_1} = h\overset{*}{1}^{1-\alpha}$$

avec, d'après (3) et (4),

$$f_1 = \overset{*}{f}\overset{*}{1}^{1-\alpha} = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}\int_0^1 \frac{F\big(x, x+(y-x)t\big)}{t^{1-\alpha}(1-t)^{\alpha}}\, dt.$$

L'équation (10) est bien équivalente à (9), car, en composant à nouveau à droite par $\overset{*}{1}^{\alpha}$, on en tire

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}\overset{*}{1}^{1-\alpha}\overset{*}{1}^{\alpha} = h\overset{*}{1}^{1-\alpha}\overset{*}{1}^{\alpha},$$

(¹) VOLTERRA, [123], Note II.

c'est-à-dire, puisque les règles de composition s'appliquent

ou encore

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}\overset{*}{1} = \overset{*}{h}\overset{*}{1}$$

$$\int_x^y \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}(x, \xi)\, d\xi = \int_x^y h(x, \xi)\, d\xi$$

et enfin, en dérivant par rapport à y

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}(x, y) = h(x, y).$$

Tout revient donc à résoudre (10); or on se trouve dans le premier cas traité au Chapitre VI. Le noyau f_1 est dérivable par rapport à y s'il en est ainsi de F et le second membre

$$\int_x^y h(x, \xi)\frac{(y-\xi)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\, d\xi$$

s'écrit, avec une intégration par parties

$$h(x, x)\frac{(y-x)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} + \int_x^y h'_\xi(x, \xi)\frac{(y-\xi)^{1-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)}\, d\xi,$$

en admettant l'existence de $h'_\xi(x, \xi)$. Sous cette dernière forme il est clair que le second membre [que nous noterons $h_1(x, y)$] est nul pour $y = x$ et admet une dérivée par rapport à y. Cette dérivée n'est pas bornée, mais elle n'est infinie (pour $y = x$) que d'ordre α, de sorte qu'il n'y a pas de difficultés.

L'équation déduite de (10) en dérivant par rapport à y, soit

$$\varphi(x, y)\,\mathrm{F}(x, x) + \int_x^y \varphi(x, \xi)\frac{\partial f_1(\xi, y)}{\partial y}\, d\xi = \frac{\partial h_1(x, y)}{\partial y},$$

donnera $\varphi(x, y)$ par la formule habituelle pourvu que $\mathrm{F}(x, x)$ ne soit jamais nul.

6. La méthode précédente conduit également à la solution de (9) ou (9′) si l'ordre α du noyau est plus grand que un et non entier. Posons

$$\alpha = n + \beta \qquad (n \text{ entier positif, } 0 < \beta < 1).$$

Nous passerons de (9) à l'équation

$$(10_1) \qquad \overset{*}{\varphi}\overset{*}{f}\overset{*}{1}^{1-\beta} = \overset{*}{h}\overset{*}{1}^{1-\beta},$$

dont le noyau $\overset{*}{f}\overset{*}{1}^{1-\beta}=f_1$ est d'ordre entier $n+1$. On terminera comme au Chapitre VI (n° 21) et, *si h est d'ordre au moins $n+\beta+1$*, on aura une solution finie et continue de (9).

7. Équation d'Abel. — La première équation intégrale, qui fut envisagée et résolue par Abel ([1]), appartient précisément au type précédent.

Abel l'introduit à propos de la question suivante de Mécanique :

Déterminer une courbe située dans un plan vertical, telle qu'un mobile pesant obligé à la parcourir arrive au point le plus bas O *dans un temps qui soit une fonction $h(y)$ donnée de la hauteur initiale y au-dessus de* O. *On suppose qu'au départ le mobile a une vitesse nulle.*

Prenons un système d'axes de coordonnées x, y dans le plan de la courbe, x étant horizontal, y vertical et dirigé vers le haut. L'équation de la courbe sera $x=x(y)$ et, s étant son arc, on aura

$$ds = dy\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \varphi(y)\,dy \tag{11}$$

en posant

$$\varphi(y)=\sqrt{1+\left(\frac{dx}{dy}\right)^2}.$$

En appliquant le théorème de la force vive, on trouve, pour le temps $h(y)$ de la chute

$$\sqrt{2g}\,h(y)=\int_0^y \frac{\varphi(\eta)}{\sqrt{y-\eta}}\,d\eta$$

qui peut s'écrire

$$\frac{\sqrt{2g}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}h(y)=\int_0^y \varphi(\eta)\,\frac{(y-\eta)^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\,d\eta,$$

du type (9′) avec le noyau $\overset{*}{f}=\overset{*}{1}^{\frac{1}{2}}$. La méthode du n° 5 s'applique donc : il suffit de composer à droite par $\overset{*}{1}^{\frac{1}{2}}$ les deux membres de

---

([1]) Abel, [1] et [2].

l'équation précédente pour avoir

$$\frac{\sqrt{2g}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^y \frac{h(\eta)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)(y-\eta)^{\frac{1}{2}}}\,d\eta = \int_0^y \varphi(\eta)\,d\eta,$$

d'où, puisque $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

$$\varphi(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{h(\eta)\,d\eta}{\sqrt{y-\eta}}.$$

Le problème est ainsi résolu. Dans le cas particulier où l'on cherche la *courbe tautochrone*, $h(y)$ doit être une constante c. On trouve alors

$$\varphi(y) = \frac{\sqrt{2g}}{\pi}\frac{c}{\sqrt{y}}$$

et, par une intégration très aisée de l'équation différentielle (11). on constate que la courbe est une cycloïde.

8. Abel a aussi traité le cas de l'équation intégrale plus générale

$$\int_0^y \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^\alpha} = h(y) \qquad (0 < \alpha < 1),$$

pour laquelle il a employé la méthode des développements en série.

Cette équation est également du type (9') avec le noyau $f = \overset{*}{1}{}^{1-\alpha}$, le second membre devenant $\frac{h(y)}{\Gamma(1-\alpha)}$. On la traitera donc en composant à droite par $\overset{*}{1}{}^{\alpha}$ et, compte tenu de ce que

$$\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha) = \frac{\pi}{\sin\alpha\pi},$$

on aura

$$\varphi(y) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{dy}\int_0^y \frac{h(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{1-\alpha}}.$$

La dérivation peut s'effectuer comme il a été indiqué à la fin du n° 5 et l'on trouve ainsi

$$\varphi(y) = \frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left\{\frac{h(0)}{y^{1-\alpha}} + \int_0^y \frac{h'(\eta)\,d\eta}{(y-\eta)^{1-\alpha}}\right\},$$

la solution n'étant finie, pour $y = 0$, que si $h(0)$ est nul.

9. Équation de Liouville. — Indépendamment d'Abel, Liouville, en étudiant une classe étendue de questions géométriques et physiques par la méthode des dérivées à indices quelconques ([1]), avait été conduit, en 1832, à résoudre l'équation d'Abel. Nous allons traiter l'un des problèmes de Liouville.

Une droite indéfinie y, sur laquelle il y a une distribution de masses uniforme et symétrique par rapport à l'axe des x, est attirée par un point A situé sur cet axe à la distance x. L'attraction sur

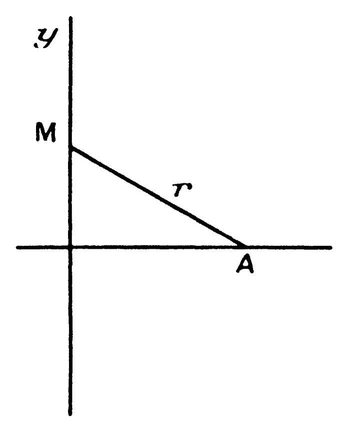


Fig. 6.

chaque point de y dépend de la distance à A, mais la loi en est inconnue. L'attraction totale $\psi(x)$ étant connue, déterminer l'action élémentaire $F(r)$ du point A sur un point M de la droite, situé à la distance r de A.

On peut écrire

$$\psi(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(r)\frac{x}{r}\,dy = 2\int_{0}^{\infty} F(r)\frac{x}{r}\,dy$$

et, par la transformation

$$r^2 = \xi, \qquad x^2 = z,$$

qui donne

$$y^2 = \xi - z,$$

en désignant enfin

$$\frac{F(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}} \text{ par } \varphi(\xi) \quad \text{et} \quad \frac{\psi(\sqrt{z})}{\sqrt{z}} \text{ par } h(z),$$

il vient

(12) $$h(z) = \int_{z}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi - z}},$$

([1]) Liouville, [65], [66], [67].

équation que Liouville traite par des développements en série. Nous remarquerons qu'elle se ramène à l'équation d'Abel, par la transformation $z = \frac{1}{y}$, $\xi = \frac{1}{\eta}$ et l'on en tire facilement la solution

$$\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\frac{d}{dz}\int_z^\infty \frac{h(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi - z}}.$$

Observons aussi que l'on peut traiter (12) directement. On obtient

$$\int_z^\infty \frac{h(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi - z}} = \int_z^\infty \frac{d\xi}{\sqrt{\xi - z}}\int_\xi^\infty \frac{\varphi(\eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta - \xi}}$$

et, en échangeant l'ordre des dérivations,

$$\int_z^\infty \frac{h(\xi)\,d\xi}{\sqrt{\xi - z}} = \int_z^\infty \varphi(\eta)\,d\eta \int_z^\eta \frac{d\xi}{\sqrt{(\xi - z)(\eta - \xi)}} = \pi\int_z^\infty \varphi(\xi)\,d\xi.$$

Ce calcul suppose la convergence des intégrales, c'est-à-dire que h est infiniment petit d'ordre $\frac{1}{2} + \varepsilon$ ($\varepsilon > 0$) lorsque la variable, prise pour infiniment grand principal, tend vers l'infini.

Par les calculs dont nous venons de parler, Liouville avait en vue de fonder la théorie des dérivées à indice quelconque. L'élégance de son analyse a conduit plusieurs géomètres, comme Riemann, Holmgren, Letnikoff, Hadamard, Pincherle, à employer les dérivées qu'il a introduites. Les dérivées à indice quelconque ont d'ailleurs été l'objet de travaux récents (Scatizzi) et nous aurons à y revenir.

Rappelons-en pour le moment la définition. Une dérivée d'indice quelconque α de la fonction $y(x)$ sera définie par

$$D_x^\alpha y(x) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)}\int_0^x (x-t)^{-\alpha-1} y(t)\,dt \qquad \text{pour } \alpha < 0$$

et

$$D_x^\alpha y(x) = \frac{d^p}{dx^p} D_x^{\alpha-p} y(x) \qquad \text{pour } 0 < \alpha < p \quad (p \text{ entier})$$

ou par des formules équivalentes ([1]). On voit la relation avec l'étude des équations intégrales de Volterra ([2]).

La notion précédente a permis à M. Mandelbrojt une élégante extension du calcul des variations ([3]). Au lieu de considérer une

---

([1]) *Cf.* [93], [44], [38].
([2]) *Cf.* Scatizzi, [101].
([3]) Mandelbrojt, [69].

intégrale

$$I = \int_a^b f(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\, dx$$

qui concerne une fonction ordinaire de x et de $(n+1)$ variables $y^{(i)}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$, il considère, par application du procédé usuel de passage du discontinu au continu, une fonctionnelle

$$F_\alpha[y^{(\alpha)}(x);\ x]$$

qui dépend de x et de toutes les valeurs de

$$y^\alpha(x) = D_x^\alpha y(x)$$

lorsque α est variable dans un intervalle (O, A), puis l'intégrale

$$J = \int_a^b F_\alpha[y^{(\alpha)}(x),\ \alpha]\, dx.$$

Pour étudier l'extremum de cette intégrale, il faut d'abord en annuler la variation première δJ. En appliquant, pour transformer δJ, la règle de Dirichlet ([1]) au lieu de l'intégration par parties, on est conduit, pour $y(x)$, à une équation fonctionnelle du type suivant :

$$G_\alpha[y^{(\alpha)}(x);\ x] = 0, \qquad 0 \leqq \alpha \leqq A, \qquad y^{(\alpha)}(x) = D_x^\alpha y;$$

c'est une équation qui peut être dite *équation différentielle continue* par rapport à l'inconnue $y(x)$.

10. Des équations intégrales plus générales que celles d'Abel et de Liouville avaient été envisagées par Sonine ([2]) : les équations de Sonine sont du type (9'), le noyau $f(x, y)$ étant fonction de la seule variable $y - x$ et développable en série. Mais tous ces travaux sur des équations intégrales particulières, traitées par des méthodes diverses et souvent laborieuses, restèrent isolés jusqu'au développement de la théorie générale.

Les notations introduites précédemment pour la *composition* nous permettent d'ailleurs d'exposer très rapidement les résultats de Sonine.

([1]) Note de la page 137.

([2]) SONINE, [105], [106].

Ce dernier considère l'équation [du type (9')]

$$\int_0^y \varphi(\xi) f(y-\xi)\,d\xi = h(y),$$

laquelle, en remplaçant y par $y-x$ et faisant un changement de variable sous le signe d'intégration, devient

$$(13) \qquad \int_x^y \varphi(\xi - x) f(y-\xi)\,d\xi = h(y-x)$$

ou bien, avec nos notations,

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \overset{*}{h},$$

qui est du type (9), l'inconnue φ et le second membre h étant, comme le noyau, fonctions de $y-x$. Le développement en série qu'admet Sonine pour f peut s'écrire, avec nos notations,

$$f = \overset{*}{1}{}^{\alpha}\left(\overset{*}{1}{}^{0} + A_1 \overset{*}{1} + A_2 \overset{*}{1}{}^{2} + \ldots\right),$$

les A_i étant des constantes multiplicatives. L'équation (13) donne alors

$$(14) \qquad \overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{1}\left(\overset{*}{1}{}^{0} + A_1 \overset{*}{1} + \ldots\right) = \overset{*}{h}\,\overset{*}{1}{}^{1-\alpha}.$$

Mais, si l'on effectue le développement en série, qui peut être purement formel,

$$\frac{1}{1 + A_1 z + A_2 z^2 + \ldots} = 1 + B_1 z + \ldots + B_n z^n + \ldots,$$

il est clair, d'après les propriétés de la composition (Chap. VI, n° 12), que le produit de composition

$$\left(\overset{*}{1}{}^{0} + A_1 \overset{*}{1} + A_2 \overset{*}{1}{}^{2} + \ldots\right)\left(\overset{*}{1}{}^{0} + B_1 \overset{*}{1} + \ldots\right)$$

se réduit à $\overset{*}{1}{}^{0}$. On tire donc de (14)

$$\overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{1} = \overset{*}{h}\,\overset{*}{1}{}^{1-\alpha}\left(\overset{*}{1}{}^{0} + B_1 \overset{*}{1} + B_2 \overset{*}{1}{}^{2} + \ldots\right)$$

et, en posant

$$\overset{*}{1}{}^{1-\alpha}\left(\overset{*}{1}{}^{0} + B_1 \overset{*}{1} + \ldots\right) = S(y-x),$$

il vient, pour solution de (13)

$$\varphi(y) = \frac{d}{dy}\int_0^y h(\xi)\,S(y-\xi)\,d\xi.$$

d'où aisément

$$\varphi(y) = h(0)\,S(y) + \int_0^y h'(\xi)\,S(y-\xi)\,d\xi.$$

On voit que les méthodes suivies réduisent à de pures identités algébriques les formules de Sonine.

M. Whittaker a également envisagé un cas analogue. Nous renvoyons, pour les formules qu'il obtient et qui, comme celles de Sonine, peuvent être d'un emploi commode pour la résolution pratique de l'équation, à nos Leçons sur la composition ([**133**], p. 112).

11. Équations de première espèce à noyaux logarithmiques. — Un autre type, traité par M. Volterra et qui lui a servi dans le développement de sa théorie des logarithmes de composition ([1]), est celui d'équations de première espèce

$$\overset{*}{\varphi}\overset{*}{f} = \overset{*}{h},$$

dont le noyau f est infini pour $y = x$ par suite de la présence de termes logarithmiques : par exemple

$$f = \log(y-x) + \text{const.}$$

La résolution d'une telle équation, et celle d'autres équations plus générales, peut être déduite des principes suivants.

La formule

$$\overset{*}{1}{}^{\alpha}\,\overset{*}{1}{}^{\beta} = \overset{*}{1}{}^{\alpha+\beta},$$

c'est-à-dire

$$(15)\qquad \int_x^y \frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{(y-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,d\xi = \frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)},$$

donne, par une intégration par rapport à β et une dérivation par rapport à α,

$$(16)\qquad \int_x^y \frac{\partial}{\partial\alpha}\,\frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,d\xi \int_\beta^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta'-1}}{\Gamma(\beta')}\,d\beta' = -\frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}$$

et, en particulier, pour $\alpha = \beta = 1$,

$$(16')\qquad \int_x^y [\log(\xi-x)+C]\,d\xi \int_0^\infty \frac{(y-\xi)^{\beta}}{\Gamma(\beta+1)}\,d\beta = -(y-x),$$

([1]) *Cf.* [133], auquel on pourra se reporter pour plus de détails.

C étant la constante d'Euler :

$$C = -\Gamma'(1) = 0,57721\ldots.$$

On a ainsi construit une fonction finie et continue

$$(17) \qquad \lambda(y-x) = \int_0^\infty \frac{(y-x)^\beta}{\Gamma(1+\beta)}\,d\beta,$$

dont la composition avec $\log(y-x) + C$ donne $-\overset{*}{1}{}^2$. On en déduira immédiatement la solution de

$$(18) \qquad \int_x^y \varphi(x,\xi)\{\log(y-\xi)+C\}\,d\xi = h(x,y);$$

il suffit de composer les deux membres à droite par $\lambda(y-x)$ pour avoir

$$\int_x^y \varphi(x,\xi)(y-\xi)\,d\xi = -\int_x^y h(x,\xi)\lambda(y-\xi)\,d\xi,$$

d'où, sous la condition que h est nul pour $y = x$, on tirera

$$(19) \qquad \varphi(x,y) = -\frac{d^2}{dy^2}\int_x^y h(x,\xi)\lambda(y-\xi)\,d\xi.$$

La double dérivation de (19) ne peut s'effectuer sans précautions, la dérivée première de λ étant, comme on le vérifie aisément, infinie comme $\dfrac{1}{(y-x)\log^2(y-x)}$ pour $y = x$ (¹). On constate (²) que (19) s'écrit

$$(19') \qquad \varphi(x,y) = -h'_y(x,x)\lambda(y-x) - \int_x^y h''_{\xi^2}(x,\xi)\lambda(y-\xi)\,d\xi.$$

12. La méthode se généralise. Remplaçons (15) par

$$(20) \qquad \int_x^y e^{q(\alpha+\beta-1)}\frac{(\xi-x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}\,\frac{(y-\xi)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}\,d\xi = \frac{(y-x)^{\alpha+\beta-1}}{\Gamma(\alpha+\beta)}\,e^{q(\alpha+\beta-1)},$$

où q est une constante quelconque et faisons le même calcul, puis

---

(¹) Log² désigne le carré du logarithme, de même plus loin log^k en désignera la puissance $k^{\text{ième}}$.

(²) *Cf.* [133], p. 132.

prenons, dans la formule obtenue $\beta = 1$. Il vient

$$(21) \quad \int_x^y \frac{(\xi - x)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \left\{ \log(\xi - x) + q - \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} \right\} \mu(y-\xi)\, d\xi = -\frac{(y-x)^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}$$

avec

$$\mu(y-x) = \int_0^\infty \frac{(y-x)^\zeta}{\Gamma(\zeta+1)} e^{q\zeta}\, d\zeta.$$

On en déduira en particulier, pour $\alpha = 1$, la solution de l'équation

$$\int_x^y \varphi(x,\xi) \left\{ \log(y-\xi) + M \right\} d\xi = h(x,y),$$

analogue à (18), mais où C a été remplacée par une constante quelconque M; l'expression de φ sera la même que (19) ou (19′) mais en y remplaçant λ par μ et en prenant

$$q = M - C.$$

13. On peut aller plus loin. En dérivant (21) par rapport à α et en ajoutant, à l'équation obtenue, l'équation (21) elle-même multipliée par la constante k, on a

$$(22) \quad \int_x^y (\xi - x)^{\alpha-1} \left[\log^2(\xi - x) + M_1 \log(\xi - x) + M_2 \right] \mu(y-\xi)\, d\xi$$
$$= -\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha} \left\{ \log(y-x) + m_1 \right\}$$

avec

$$q + k = 2\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + M_1,$$

$$qk = M_1 \frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \frac{\Gamma''(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + M_2,$$

$$m_1 = k - \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)}.$$

En appliquant la même méthode à (22) et ainsi de suite on aura, en général,

$$(23) \quad \int_x^y (\xi - x)^{\alpha-1} \sum_0^n{}_k M_k \log^{n-k}(\xi - x)\, \mu(y-\xi)\, d\xi$$
$$= -\frac{(y-x)^\alpha}{\alpha} \sum_0^{n-1}{}_k m_k \log^{n-1-k}(y-x).$$

n étant un entier quelconque; les coefficients m_k et q se calculent à partir des M_k qui peuvent être pris arbitrairement (on a en particulier $m_0 = M_0$).

La formule (23) permet de traiter l'équation

$$(24)\quad \int_x^y \varphi(x,\xi)\left\{(y-\xi)^{\alpha-1}\sum_0^n M_k \log^{n-k}(y-\xi) + (y-\xi)^\alpha F(\xi,y)\right\}d\xi = h(x,y),$$

où F est une fonction donnée finie et continue. Il suffit de composer les deux membres par $\mu(y-x)$ pour obtenir

$$(24')\quad \int_x^y \varphi(x,\xi)\left\{\frac{(y-\xi)^\alpha}{\alpha}\sum_0^{n-1}{}_k\, m_k \log^{n-1-k}(y-\xi) + (y-\xi)^{\alpha+1}\Phi(\xi,y)\right\}d\xi = -\int_x^y h(x,\xi)\,\mu(y-\xi)\,d\xi,$$

Φ ayant une valeur évidente. L'exposant de la plus haute puissance du logarithme est ainsi diminué d'une unité et en répétant n fois la transformation on fait disparaître les logarithmes. On aboutit ainsi à une équation dont le noyau est une fonction d'ordre $\alpha + n$ et qui se traite par l'analyse des n[os] 5-6.

14. Soit, par exemple,

$$\int_x^y \varphi(x,\xi)[\log(y-\xi) + M + (y-\xi)F(\xi,y)]\,d\xi = h(x,y),$$

on se ramènera à

$$\int_x^y \varphi(x,\xi)\left\{(y-\xi) - (y-\xi)^2\int_0^\infty \frac{(y-\xi)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}e^{(M-C)\beta}\,d\beta \times \int_0^1 \zeta(1-\zeta)^\beta F\big(\xi, \xi+(y-\xi)\zeta\big)\,d\zeta\right\}d\xi$$
$$= -\int_0^y h(x,\zeta)\,d\zeta \int_0^\infty \frac{(y-\zeta)^\beta}{\Gamma(\beta+1)}e^{(M-C)\beta}\,d\beta.$$

En dérivant deux fois par rapport à y, on trouvera une équation de seconde espèce

$$\varphi(x,y) - \int_x^y \varphi(x,\xi)\,\Psi(\xi,y)\,d\xi = H(x,y),$$

où Ψ et H ont des valeurs évidentes et sont des fonctions finies et continues dans l'hypothèse que F et h ont des dérivées premières et secondes par rapport à y également finies et continues. Cette équation se résoudra comme il a été vu au Chapitre VI.

II. — ÉQUATIONS DE PREMIÈRE ESPÈCE DANS LE CAS OÙ LA DIAGONALE DU NOYAU A UN ZÉRO ISOLÉ.

15. Reprenons l'équation de première espèce

$$\int_0^y \varphi(\xi) f(\xi, y)\, d\xi = h(y), \tag{25}$$

le noyau f étant d'ordre positif quelconque. Si l'ordre n'est pas entier nous savons (nos 5-6) nous ramener au cas de l'ordre entier, puis, par dérivation (Chap. VI, n° 21), nous pourrons toujours nous réduire au cas où l'ordre est égal à l'unité. Nous pouvons donc, sans perdre en généralité, supposer que $f(x, y)$ est du premier ordre, c'est-à-dire que $f(y, y)$ n'est pas identiquement nul.

L'équation (25) se réduit alors, sous les conditions habituelles, à

$$\varphi(y) + \int_0^y \varphi(\xi) \frac{f'_y(\xi, y)}{f(y, y)}\, d\xi = \frac{h'(y)}{f(y, y)}, \tag{26}$$

équation de seconde espèce qui se traite sans difficulté si $f(y, y)$ (diagonale du noyau) ne s'annule jamais dans l'intervalle considéré $0 \leqq y \leqq l$.

Lorsque la diagonale a un zéro isolé pour $y = y_0$, l'équation (26) a un noyau infini pour $y = y_0$ et qui n'est pas du type envisagé au paragraphe précédent. *Si y_0 n'est pas nul*, on peut au moins définir la solution de (26) pour $0 \leqq y < y_0$ et il faudra en général se borner à cet intervalle. Exceptionnellement, la solution obtenue pourra être prolongée au delà de y_0 : admettons par exemple que l'intégrale

$$\mathrm{H}(y) = \int_0^{y_0} \varphi(\xi) f'_y(\xi, y)\, d\xi$$

(où la fonction φ est connue, comme on vient de le voir, pour $0 \leqq \xi < y_0$) ait un sens pour $0 \leqq y < y_1$, avec $y_1 > y_0$; la détermination de $\varphi(y)$

pour $y_0 \leqq y < y_1$ se ramènera à la résolution de

$$\varphi(y) + \int_{y_0}^{y} \varphi(\xi) \frac{f'_y(\xi, y)}{f(y, y)} d\xi = \frac{h'(y) + \mathrm{H}(y)}{f(y, y)} \qquad (y > y_0),$$

et, en prenant pour variable $y - y_0$, on est réduit finalement à une équation qui a exactement la forme (26), le dénominateur étant nul pour la valeur zéro de la variable.

Il reste donc à étudier le cas où $y_0 = 0$, cas pour lequel les résultats obtenus ne permettent même pas d'affirmer l'existence de $\varphi(y)$ dans un intervalle restreint $0 < y < \varepsilon$. C'est ce cas que nous étudierons dans le présent paragraphe. Les résultats qui le concernent ont été donnés par M. Volterra en 1896 [1]. Plus tard M. Lalesco [2] a repris la même étude en reliant le problème à la théorie des équations différentielles linéaires. C'est la méthode de M. Volterra, avec un complément dû à M. Holmgren [3], que nous exposerons d'abord en détail.

16. Précisons d'abord les hypothèses à faire sur $f(x, y)$ et sur $h(y)$. Nous sommes dans le cas où $f(y, y)$ a un zéro isolé $y = 0$ et nous admettrons que ce zéro a l'ordre de multiplicité entier n.

Il n'en résulte pas *nécessairement* qu'un développement limité de $f(x, y)$ suivant les puissances de x et y (développement que nous supposons exister pour un instant) *doive commencer par des termes de degré* n; il pourrait fort bien avoir des termes de degré inférieur à n, *pourvu que ces termes admettent le facteur* $y - x$. *Nous supposons que cette circonstance particulière ne se produit pas et, en général, que les termes principaux de* $f(y, y)$ *viennent des termes principaux de* $f(x, y)$ (x *et* y *petits*).

Dès lors l'intégrale

$$\int_0^y \varphi(\xi) f(\xi, y)\, d\xi,$$

où la solution cherchée $\varphi(y)$ est supposée continue, admet au moins le facteur y^{n+1} et nous devons faire la même supposition sur le second membre $h(y)$.

---

(1) *Cf.* Volterra, [123], Notes III et IV.
(2) *Cf.* Lalesco, [53] et [55].
(3) *Cf.* Holmgren, [45].

Nous poserons donc les hypothèses suivantes :

A. *On a, dans le domaine* $0 \leq x \leq y \leq l$

$$f(x, y) = \sum_{i}^{n} a_i x^i y^{n-i} + \bar{f}(x, y)$$

avec

$$\bar{f} = \sum_{i}^{n+1} x^i y^{n+1-i} m_i(x, y),$$

les a_i *étant des constantes dont la somme n'est pas nulle*

$$\sum_{i}^{n} a_i \neq 0,$$

les m_i *des fonctions finies et continues ainsi que leurs dérivées par rapport à* y. *De plus*

$$f(y, y) = y^n \sum a_i + \bar{f}(y, y)$$

n'a, dans l'intervalle $0 \leq y \leq l$, *pas d'autre zéro que* $y = 0$, *ce zéro ayant la multiplicité exactement n puisque*

$$\sum_i a_i \neq 0.$$

B. *On a, pour* $0 \leq y \leq l$,

$$h(y) = y^{n+1} \bar{h}(y),$$

$\bar{h}(y)$ *étant finie et continue ainsi que sa dérivée.*

Nous établirons alors un premier théorème qui donne les conditions pour que l'équation (25) ait *une seule solution finie*. Les théorèmes suivants II et III donneront la résolution effective de l'équation (25) quand les conditions posées sont satisfaites. Il restera enfin à montrer que, dans tout autre cas, (25) a une infinité de solutions dont il faudra préciser l'arbitraire.

17. Théorème I. — *Sous les conditions* A *et* B *il existe une et une seule fonction* $\varphi(y)$, *finie et continue, vérifiant* (25), *lorsque*

toutes les racines de l'équation algébrique en λ

$$\text{(E)} \qquad \frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \ldots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0$$

ont leur partie réelle positive.

Dans la suite nous supposons que ces racines sont toutes distinctes.

L'équation (25) est d'abord équivalente à

$$(25') \qquad \varphi(y) f(y, y) + \int_0^y \varphi(\xi) f_2(\xi, y)\, d\xi = h'(y)$$

avec

$$f_2 = \frac{\partial f}{\partial y} = \sum_0^n{}_i (n - i) a_i x^i y^{n-1-i} + \bar{f}_2$$

et

$$\bar{f}_2 = \frac{\partial \bar{f}}{\partial y}.$$

En supposant pour un instant la fonction φ quelconque, nous poserons

$$\Phi(y) = \varphi(y) f(y, y) + \int_0^y \varphi(\xi) f_2(\xi, y)\, d\xi - h'(y),$$

[$\Phi(y)$ est donc nulle identiquement quand φ vérifie (25')] et nous calculerons

$$(27) \qquad \sum_1^n{}_s K_s z^{-\lambda_s + 1} \int_0^z \Phi(y) y^{\lambda_s - n - 1}\, dy,$$

les λ_s étant les racines de (E), les K_s des constantes qui seront choisies ultérieurement.

Les parties réelles de λ_s étant positives, les termes sous le signe somme sont finis ou, tout au plus, infinis pour $y = 0$ d'un ordre inférieur à un nombre plus petit que 1. L'intégrale (27) a un sens et l'on peut utiliser la règle de Dirichlet pour en transformer chacun des termes. On arrive ainsi à mettre (27) sous la forme

$$(28) \qquad \int_0^y \varphi(y) F(y, z)\, dy - H(z)$$

avec

$$(29)\qquad H(z) = \sum_{1}^{n}{}_{s} K_s z^{-\lambda_s+1} \int_0^z h'(y) y^{\lambda_s-n-1}\, dy,$$

$$(30)\qquad F(y, z) = \sum_{1}^{n}{}_{s} K_s z^{-\lambda_s+1} \left\{ f(y, y) y^{\lambda_s-n-1} + \int_y^z f_2(y, \zeta) \zeta^{\lambda_s-n-1}\, d\zeta \right\}.$$

Nous transformerons F en y calculant d'abord les termes qui dépendent des a_i. Après des calculs faciles ces termes s'écrivent

$$\sum_{is} K_s z^{-\lambda_s+1} y^{\lambda_s-1} a_i \frac{\lambda_s - n - 1}{\lambda_s - i - 1} + \sum_{is} K_s z^{-i} y^i a_i \frac{n - i}{\lambda_s - i - 1}.$$

La première somme disparaît puisque les λ_s sont les racines de l'équation (E). La seconde somme peut être réduite à ses termes correspondants à $i = 0$ à condition de choisir les K_s de façon que

$$(31)\qquad \sum_{1}^{n}{}_{s} \frac{K_s}{\lambda_s - i - 1} = 0 \qquad \text{pour } i = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Les équations (31) expriment que $\sum_s \frac{K_s}{z - \lambda_s}$ admet les zéros $2, 3, \ldots, n$. Prenons

$$(32)\qquad \sum \frac{K_s}{z - \lambda_s} = \frac{(z-2)(z-3)\ldots(z-n)}{(z-\lambda_1)\ldots(z-\lambda_n)},$$

nous aurons pour K_s la valeur

$$(33)\qquad K_s = \frac{(\lambda_s - 2)(\lambda_s - 3)\ldots(\lambda_s - n)}{(\lambda_s - \lambda_1)\ldots(\lambda_s - \lambda_n)}$$

avec au dénominateur toutes les différences $\lambda_s - \lambda_h$ pour $s \neq h$. En prenant les parties principales des deux membres de (32) pour $z = \infty$, on aura

$$(34)\qquad \sum_s K_s = 1$$

et, aisément, on établira aussi que

$$(34')\qquad \sum_s \frac{K_s}{\lambda_s} = \frac{n!}{\lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n} = \frac{\sum_i a_i}{(n+1) \sum \frac{a_i}{i+1}},$$

$$(34'')\qquad \sum_s \frac{K_s}{\lambda_s - 1} = \frac{(n-1)!}{(\lambda_1 - 1)\ldots(\lambda_n - 1)} = \frac{\sum_i a_i}{n a_0}.$$

Les K_s étant ainsi choisis, les termes de F qui dépendent des a_i se réduisent à $\Sigma_i a_i$. Les autres termes s'écrivent

$$(30_1) \qquad \sum_s K_s z^{-\lambda_s+1}\left(y^{\lambda_s-n-1}\overline{f}(y,y)+\int_y^z \overline{f}_2(y,\zeta)\zeta^{\lambda_s-1-n}\,d\zeta\right);$$

on les transformera par une intégration par parties et, tenant compte de (34), on aura ainsi

$$(30') \qquad F(y,z)=\sum_0^n{}_i\, a_i+\frac{\overline{f}(y,z)}{z^n}$$
$$-\sum_1^n{}_s\, K_s(\lambda_s-n-1)z^{-\lambda_s+1}\int_y^z \overline{f}(y,\zeta)\zeta^{\lambda_s-n-2}\,d\zeta.$$

18. Après ces préliminaires le théorème I s'établit par le raisonnement suivant.

Toute solution de (25) vérifie (25′) et, d'après le calcul précédent, satisfait aussi

$$(35) \qquad \int_0^z \varphi(y)F(y,z)\,dy=H(z).$$

Or c'est là une nouvelle équation de Volterra à laquelle s'applique la méthode du Chapitre précédent. Le second membre H (z) est fini et continu ainsi que sa dérivée. De même, d'après (30′), F (y, z) et $F'_z(y,z)$ sont finies et continues et la diagonale

$$F(y,y)=\sum a_i+\frac{\overline{f}(y,y)}{y^n}$$

ne s'annule pas pour $0\leqq y\leqq l$; (35) a donc une solution unique.

Reste à vérifier que cette solution satisfait bien (25′). Or, pour une telle solution, l'expression (27) est nulle; multiplions-la par $z^{q-2}\,dz$ puis intégrons de 0 à u ($0\leqq u\leqq l$). En donnant à q l'une des valeurs $2, 3, \ldots, n$ et échangeant les deux signes d'intégration il vient

$$\sum_1^n{}_s\frac{K_s}{q-\lambda_s}u^{q-\lambda_s}\int_0^u \Phi(y)y^{\lambda_s-n-1}\,dy-\int_0^u \Phi(y)y^{q-n-1}\sum_1^n{}_s\frac{K_s}{q-\lambda_s}\,dy.$$

D'après les relations (31) le dernier terme disparaît et, posant

$$v_s=K_s z^{-\lambda_s+1}\int_0^z \Phi(y)y^{\lambda_s-n-1}\,dy,$$

il reste

$$\frac{1}{q-\lambda_1}v_1+\frac{1}{q-\lambda_2}v_2+\ldots+\frac{1}{q-\lambda_n}v_n=0$$
$$(q=2,\ 3,\ \ldots,\ n),$$

auxquelles on joindra [puisque (27) est nulle]

$$v_1+v_2+\ldots+v_n=0.$$

Le déterminant du système linéaire ainsi formé n'étant pas nul, on en tirera

$$v_s=0, \qquad \text{d'où} \qquad \Phi(y)=0,$$

c'est-à-dire l'équation (25'). Le *théorème* I *est ainsi établi.*

19. L'équivalence que nous venons de reconnaître entre les équations intégrales (25') et (35) donne le

THÉORÈME II. — *Sous les conditions posées pour le théorème* I, *l'équation* (25) *se ramène à l'équation de première espèce* (35) *à laquelle s'applique la méthode du Chapitre précédent.*

Il pourrait sembler, de ce qui précède, que la résolution de (25) suppose, pour écrire (35) la détermination des racines λ_s de l'équation (E). Il n'en est rien. M. Volterra montre en effet comment transformer $H(z)$ et $F(y, z)$ de façon que n'y apparaissent plus explicitement les λ_s. On a

$$\sum_{1}^{n}{}_{s} K_s u^{\lambda_s}=\sum_{1}^{n}{}_{s} K_s(1+u-1)^{\lambda_s}$$
$$=\sum_{0}^{\infty}{}_{m}\frac{(u-1)^m}{m!}\sum_{1}^{n}{}_{s} K_s\lambda_s(\lambda_s-1)\ldots(\lambda_s-m+1)$$

et, de même,

$$\sum_{1}^{n}{}_{s} K_s(\lambda_s-n-1)u^{\lambda_s}$$
$$=\sum_{0}^{\infty}{}_{m}\frac{(u-1)^m}{m!}\sum_{1}^{n}{}_{s} K_s(\lambda_s-n-1)\lambda_s(\lambda_s-1)\ldots(\lambda_s-m+1).$$

Dans l'un et l'autre cas les coefficients de $(u-1)^m$ sont des fonctions symétriques des racines λ_s, qui s'expriment rationnellement au moyen

de $a_0, a_1, \ldots, a_n$: soient

$$A_m(a_0, a_1, \ldots, a_n), \quad A'_m(a_0, a_1, \ldots, a_n)$$

ces coefficients. On aura

$$\sum_1^n {}_s K_s u^{\lambda_s} = \sum_0^\infty {}_m \frac{(u-1)^m}{m!} A_m(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \Psi(a_0, a_1, \ldots, a_n \mid u)$$

et

$$\sum_1^n {}_s K_s(\lambda_s - n - 1) u^{\lambda_s} = \sum_0^\infty {}_m \frac{(u-1)^m}{m!} A'_m(a_0, a_1, \ldots, a_n) = \Psi'(a_0, a_1, \ldots, a_n \mid u).$$

Théorème III. — *Sous les conditions du théorème* I, *l'équation* (25) *est équivalente à*

$$(35') \quad \int_0^z \left[\sum_i a_i + \frac{\bar{f}(y, z)}{y^n} - \int_y^z \bar{f}(y, \xi) \frac{z}{\xi^{n+2}} \Psi'\left(a_0, \ldots, a_n \middle| \frac{\xi}{z}\right) d\xi \right] \varphi(y)\, dy = \int_0^z h'(y) \frac{z}{y^{n+1}} \Psi\left(a_0, \ldots, a_n \middle| \frac{y}{z}\right) dy.$$

20. Passons au cas où (E) a des racines à parties réelles négatives [1].

Nous ferons d'abord la remarque suivante : $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ désignant les racines de (E) à partie réelle *positive*, on a le

Lemme. — *L'équation* (25) *a les mêmes solutions finies et continues que*

$$(36) \quad \int_0^z \varphi(y) F'(y, z)\, dy = H'(z)$$

avec

$$(37) \quad H'(z) = \sum_1^r {}_s K'_s z^{-\lambda_s + n - r + 1} \int_0^z y^{\lambda_s - n - 1} h'(y)\, dy$$

[1] Nous suivons maintenant l'analyse de M. Holmgren qui a complété le résultat (indétermination de la solution) obtenu pour ce cas par M. Volterra.

et

$$(37') \quad F'(y, z) = \sum_{i=0}^{n-r} a'_i y^i z^{n-r-i} + \frac{\bar{f}(y, z)}{z^r} - \sum_{s=1}^{r} K'_s(\lambda_s - n - 1) z^{-\lambda_s+n-r+1} \int_y^z \zeta^{\lambda_s-n-2} \bar{f}(y, \zeta)\, d\zeta,$$

les K'_s *étant définis par*

$$(38) \quad \sum_{s=1}^{r} \frac{K'_s}{\lambda_s - q} = 0 \qquad (q = n - r + 2, \ldots, n),$$

ce qui permet de prendre

$$K'_s = \frac{(\lambda_r - n)\ldots(\lambda_n - n + r - 2)}{(\lambda_s - \lambda_1)\ldots(\lambda_s - \lambda_r)},$$

les a'_i *ayant les valeurs*

$$a'_i = (n - i) a_i \sum_s \frac{K'_s}{\lambda_s - i - 1}$$

et l'équation algébrique

$$(E') \qquad \frac{a'_0}{\mu - 1} + \ldots + \frac{a'_{n-r}}{\mu - (n - r) - 1} = 0$$

admettant pour racines les autres racines de (E). *soient* $\lambda_{r+1}, \ldots, \lambda_n$.

La démonstration se fait en reprenant les calculs précédents (n^{os} **17**, **18**). Il suffira ici d'indiquer que, pour justifier l'énoncé concernant (E'), l'on écrira cette équation

$$\sum_{s=1}^{r} K'_s \left\{ (n - \mu + 1) \sum_{i=0}^{n-r} \frac{a_i}{(\mu - i - 1)(\lambda_s - i - 1)} + \sum_{i=0}^{n-r} \frac{a_i}{\lambda_s - i - 1} \right\} = 0.$$

Or λ_s et μ étant des racines distinctes de (E) on peut remplacer les sommes $\sum_{i=0}^{n-r}$ par $\sum_{i=n-r+1}^{n}$ en changeant les signes des divers termes : cette substitution fait tout disparaître, à cause des (38).

L'énoncé précédent permet de remplacer l'équation proposée par une équation analogue pour laquelle l'équation (E) n'a plus de racines à parties réelles positives.

Nous allons donc nous placer dans la suite dans le cas où l'équa-

tion (E) a toutes ses racines à partie réelle négative. Les développements ultérieurs supposeront d'ailleurs que

$$\bar{f}(x, y) = y^{n+1}\gamma(x, y), \qquad \bar{f}_2(x, y) = y^n \gamma_2(x, y),$$

γ et γ_2 restant bornées et intégrables dans le champ $0 \leqq x \leqq y \leqq l$ et ce sont là des conditions satisfaites par le noyau de l'équation (36), noyau qui, quand on utilise le lemme, remplace le noyau f.

21. Revenons alors à (25) où nous admettons que toutes les racines λ_s ont leur partie réelle négative. Il ne peut plus être question de calculer l'expression (27), mais on peut calculer l'expression analogue où la limite inférieure d'intégration est remplacée par un nombre fixe z_0 $(0 < z_0 \leqq l)$ soit

$$\sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} \Phi(y) y^{\lambda_s - n - 1}\, dy, \tag{39}$$

les K_s ayant les mêmes valeurs que plus haut.

L'équation (25) entraîne que (39) soit nulle, ce qui s'écrit

$$\begin{aligned}\sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} h'(y) y^{\lambda_s-n-1}\, dy \\ = \sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \Big\{ \int_{z_0}^{z} \varphi(y) f(y, y) y^{\lambda_s-n-1}\, dy \\ + \int_{z_0}^{z} \zeta^{\lambda_s-n-1}\, d\zeta \int_0^{\zeta} \varphi(y) f_2(y, \zeta)\, dy \Big\},\end{aligned}$$

d'où enfin [1]

$$\begin{aligned}\sum_1^n {}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^{z} h'(y) y^{\lambda_s-n-1}\, dy \\ = \int_{z_0}^{z} \varphi(y) \mathrm{F}(y, z)\, dy \\ + \int_0^{z_0} \varphi(y)\, dy \int_{z_0}^{z} d\zeta \sum {}_s \mathrm{K}_s z^{-\lambda_s+1} \zeta^{\lambda_s-n-1} f_2(y, \zeta).\end{aligned} \tag{40}$$

---

[1] Pour échanger l'ordre des intégrations on notera que

$$\int_{z_0}^{z} d\zeta \int_0^{\zeta} dy = \int_0^{z_0} dy \int_{z_0}^{z} d\zeta + \int_{z_0}^{z} dy \int_y^{z} d\zeta.$$

Les termes du second membre qui contiennent les a_i s'explicitent aisément et conduisent à

$$\sum a_i \int_0^z \varphi(y)\,dy + \sum_s \alpha_s z^{-\lambda_s+1}$$

avec

$$(41)\qquad \alpha_s = -\,K_s z_0^{\lambda_s-1} \int_0^{z_0} \varphi(y) \sum_i \frac{(n-i)a_i}{\lambda_s - i - 1}\left(\frac{y}{z_0}\right)^i dy.$$

Pour transformer les termes restants on adoptera, en ce qui concerne ceux qui proviennent de F, l'expression (30_1) (n° 17); en remplaçant l'intégrale $\int_y^z d\zeta$ de (30_1) par $\int_y^{z_0} d\zeta + \int_{z_0}^z d\zeta$ et réduisant, on met enfin (40) sous la forme suivante :

$$(42)\quad H(z, z_0) = \int_0^z \varphi(y)\,\mathcal{F}(y, z, z_0)\,dy + \int_{z_0}^z \varphi(y)\,\mathcal{G}(y, z, z_0)\,dy$$

avec

$$\left\{\begin{aligned}
&(a)\quad H(z, z_0) = \sum_s^{\overset{n}{}} K_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^z h'(y)\,y^{\lambda_s-n-1}\,dy - \sum_s \alpha_s z^{-\lambda_s+1},\\
&(b)\quad \mathcal{F}(y, z, z_0) = \sum_i a_i + \sum_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_{z_0}^z \frac{\partial \overline{f}(y,\zeta)}{\partial\zeta}\,\zeta^{\lambda_s-n-1}\,d\zeta,\\
&(c)\quad \mathcal{G}(y, z, z_0) = \sum_s K_s\left(\frac{z}{y}\right)^{-\lambda_s+1}\frac{\overline{f}(y,y)}{y^n}\\
&\qquad\qquad + \sum_s K_s z^{-\lambda_s+1} \int_y^{z_0} \frac{\partial \overline{f}(y,\zeta)}{\partial\zeta}\,\zeta^{\lambda_s-n-1}\,d\zeta,
\end{aligned}\right.$$

les α_s ayant les valeurs (41).

22. Il est bien clair que toute solution bornée de (25) vérifie (42), les constantes α_s ayant les valeurs données par (41). Mais, inversement, soit une solution bornée de (42) où les α_s ont des valeurs *choisies arbitrairement*. Nous allons constater que nécessairement les α_s sont exprimés, en fonction de φ, par les formules (41); il en résultera, en reprenant un raisonnement analogue à celui du n° 18, que $\varphi(y)$ satisfait (25).

Dérivons en effet (42) par rapport à z, multiplions par z^i et intégrons de zéro à z_0. Après des intégrations par parties toutes naturelles

il reste seulement (¹)

$$(43)\qquad -\sum_j a_j \int_0^{z_0} \frac{y^i}{z_0^i}\varphi(y)\,dy = \sum_{1}^{n}{}_s \alpha_s(\lambda_s-1)\frac{z_0^{-\lambda_s+1}}{\lambda_s-i-1} \qquad (i=1,2,\ldots,n-1),$$

la formule ayant lieu aussi pour $i=0$, comme il résulte de (42) où l'on fait $z=z_0$. Ce sont là des équations du premier degré par rapport aux α_s dont le déterminant n'est pas nul et qui ont donc une solution unique : or ces équations sont satisfaites par les expressions (41), comme on le vérifie sans peine (²).

23. Tout revient donc à résoudre (42), *où les α_s sont prises arbitrairement*. Or cette équation donne par dérivation l'équation équivalente

$$(44)\qquad \varphi(z) = \frac{z^n}{f(z,z)}\frac{\partial H(z,z_0)}{\partial z} - \int_0^z \frac{z^n}{f(z,z)}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z}\varphi(y)\,dy - \int_{z_0}^{z} \frac{z^n}{f(z,z)}\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z}\varphi(y)\,dy,$$

(¹) Le terme qui provient de l'intégrale dans $H(z, z_0)$ s'écrit

$$-i\int_0^{z_0} z^{i-1}\sum_s K_s z^{-\lambda_s+1}\int_{z_0}^{z} h'(y)y^{\lambda_s-n-1}\,dy;$$

en changeant l'ordre des intégrations et effectuant l'intégration par rapport à z on trouve qu'il est nul, compte tenu des relations (31). De même on verra que le terme qui vient de la seconde somme dans $\mathcal{G}$ est nul. Enfin disparaissent ensemble les termes qui viennent des intégrales figurant dans $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$. Il ne reste donc que les termes du texte.

(²) On a à vérifier que

$$\sum_s K_s \frac{\lambda_s-1}{\lambda_s-i-1}\,\frac{(n-j)a_j}{\lambda_s-j-1} = \begin{cases} 0 & \text{si } i\neq j,\\ \Sigma a_i & \text{si } i=j.\end{cases}$$

Le premier résultat est évident parce que

$$\frac{(\lambda_s-1)(i-j)}{(\lambda_s-i-1)(\lambda_s-j-1)} = \frac{i}{\lambda_s-i-1} - \frac{j}{\lambda_s-j-1}.$$

Pour obtenir le second on partira de (32) qui donne

$$\sum \frac{K_s}{(\lambda_s-i-1)^2} = \frac{(n-i-1)!\,(i-1)!\,(-1)^i}{(\lambda_1-i-1)(\lambda_2-i-1)\ldots(\lambda_n-i-1)},$$

et l'on calculera facilement le dénominateur, produit des racines d'une équation qui se déduit de (E).

à laquelle s'applique la méthode des approximations successives (Chap. VI, n° 11).

En écrivant, pour abréger, (44) sous la forme

$$\varphi(z) = \frac{z''}{f(z, z)} \frac{\partial H(z, z_0)}{\partial z} + \Lambda[\varphi],$$

on aura la solution

$$(45) \qquad \varphi(z) = \sum_{0}^{\infty}{}_{i}\, \varphi_i(z)$$

avec

$$\varphi_0(z) = \frac{z''}{f(z, z)} \frac{\partial H(z, z_0)}{\partial z},$$

$$\varphi_i(z) = \Lambda[\varphi_{i-1}(z)].$$

(45) donne bien la solution pourvu que la série soit uniformément convergente : ce sera le cas si

$$\int_0^z \left| \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial z} \frac{z''}{f(z, z)} \right| dz + \int_z^{z_0} \left| \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} \frac{z''}{f(z, z)} \right| dz < \Delta,$$

Δ étant un nombre plus petit que 1 : ce qui arrivera toujours, comme il est évident, pourvu que z_0 soit pris assez petit et que l'on se limite à l'intervalle

$$0 \leqq z \leqq z_0.$$

Nous pouvons donc énoncer le

Théorème IV. — *L'équation* (25), *où toutes les racines λ_s ont leur partie réelle négative, a sa solution de forme*

$$\varphi(y) = \psi_0(y) + \sum_{1}^{n}{}_{s}\, \alpha_s \psi_s(y),$$

les α_s étant des constantes arbitraires. Les $\psi_s(y)$ sont solutions de l'équation homogène

$$\int_0^y \varphi(\zeta) f(\zeta, y)\, d\zeta = 0;$$

elles sont linéairement indépendantes.

Nous n'avons plus à vérifier que le dernier point. Or s'il existait une relation à coefficients constants

$$c_1 \psi_1 + \ldots + c_n \psi_n = 0,$$

on aurait

$$c_1 \int_0^{z_0} x^i \psi_1(x)\, dx + \ldots + c_n \int_0^{z_0} x^i \psi_n(x)\, dx = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, n-1);$$

mais, d'après les (43), il vient

$$\sum_k c_k(\lambda_k - 1)\frac{z^{-\lambda_k+1}}{\lambda_k - i - 1} = 0,$$

équations dont le déterminant n'est pas nul et qui entraînent que les c_k soient tous nuls.

24. Revenons au cas général et réunissons tous les résultats précédents.

Théorème V. — *Sous les conditions du début et si* (E) *a r racines ayant leur partie réelle positive, les n — r restantes ayant leur partie réelle négative, la solution générale bornée de* (25) *sera*

$$\varphi = \psi_0 + \alpha_1 \psi_1 + \ldots + \alpha_{n-r} \psi_{n-r},$$

avec $(n-r)$ *constantes arbitraires.*

25. Indication sur la méthode de Lalesco [1]. — Lalesco suppose $f(x, y)$ développable en série convergente

$$f(x, y) = \sum_{p}^{\infty}{}_{0}\, a_p(x)\frac{(y-x)^p}{p!},$$

les coefficients $a_p(x)$ étant eux-mêmes développables en série au voisinage de l'origine. Dès lors l'hypothèse introduite au début (n° 16) que les développements de $f(x, y)$ et $f(y, y)$ commencent l'un et l'autre par des termes de degré n s'exprime par les conditions suivantes :

$$a_0(x) = x^n(A_0 + B_0 x + \ldots)$$
$$a_i(x) = x^{n-i}(A_i + B_i x + \ldots) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

le coefficient A_0 étant essentiellement différent de zéro. Le second membre $h(y)$ de (25) est enfin supposé développable en une série des puissances de y qui commence par un terme en y^{n+1}.

---

(1) *Loc. cit.*, [53]

Dans ces conditions (25) équivaut à l'équation obtenue en la dérivant $n+1$ fois par rapport à y, équation qui s'écrit ([1])

$$(46)\qquad \sum_{0}^{n} \frac{d^{n-i}}{dy^{n-i}}[a_i(y)\varphi(y)] = h^{(n+1)}(y) - \int_0^y \varphi(\xi) f_{y^{n+1}}^{(n+1)}(\xi, y)\, d\xi.$$

Lalesco en cherche la solution par approximations successives, posant

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_1 + \ldots + \varphi_p + \ldots,$$

la fonction φ_0 doit satisfaire (46) où l'on supprime l'intégrale qui figure au second membre; φ_p et φ_{p-1} sont liés par la relation déduite de (46) en supprimant $h^{(n+1)}$ et remplaçant φ par φ_p au premier membre et par φ_{p-1} au second. Les fonctions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_p, \ldots$ se déterminent ainsi de proche en proche par des équations différentielles du type

$$(47)\qquad \sum_{1}^{n} \frac{d^{n-i}}{dy^{n-i}}[a_i(y)\varphi(y)] = \mathrm{H}(y),$$

$\mathrm{H}(y)$ étant connu. Or les conditions posées plus haut entraînent que l'équation homogène correspondante à (47) soit du type de Fuchs au voisinage de l'origine ([2]) et l'on vérifie que l'équation *déterminante* relative au point singulier $y = 0$ se ramène à (E) en changeant λ en $-\lambda$.

Si, dans ces conditions, les racines de (E) sont distinctes et telles que leurs différences ne soient pas entières, on sait que (47) a un système de solutions fondamentales

$$y^{-\lambda_i}\psi_i(y) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

les $\psi_i(y)$ étant régulières au voisinage de l'origine et non nulles en ce point. La solution de (47) s'obtient, à partir des solutions fondamentales supposées connues, par les quadratures que donne la méthode de variation des constantes.

Lorsque toutes les racines λ_s ont leurs parties réelles positives, (47) a *une seule solution* bornée à l'origine. Dans ce cas les termes $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n, \ldots$ que fournit la méthode d'approximations successives sont bien déterminés et l'on établit sans peine la conver-

---

([1]) *Cf.* Chap. VI, § V; les conditions aux limites pour $y = 0$ sont, ici, identiquement vérifiées.

([2]) *Cf.* Picard, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. XI.

gence de la série des φ_n. Quelques précautions permettent de traiter de même le cas général en retrouvant le théorème V (n° **24**).

26. Comparaison. — Que l'on suive l'une ou l'autre méthode on peut laisser tomber la restriction d'après laquelle les racines de l'équation (E) sont toutes distinctes. Lalesco indique les modifications que subit, dans ce cas, son analyse; le lecteur verra facilement ce que deviennent, dans le même cas, les formules de MM. Volterra et Holmgren.

La méthode de Lalesco paraît plus simple que la méthode initiale, que nous croyons cependant préférable pour les raisons suivantes :

a. M. Volterra détache en fait, dans son calcul, la partie du noyau

$$\Sigma_i a_i x^i y^{n-i}$$

qui, si elle était seule, donnerait, après $n+1$ dérivations, l'équation différentielle du type élémentaire

$$(48)\quad A_0 \frac{d^n}{dy^n}[y^n \varphi(y)] + A_1 \frac{d^{n-1}}{dy^{n-1}}[y^{n-1}\varphi(y)] + \ldots + A_n \varphi(y) = H(y)$$

avec

$$A_0 = \Sigma_i a_i, \qquad A_1 = \Sigma_i (n-i) a_i, \quad \ldots$$

ayant pour solutions fondamentales les fonctions $y^{-\lambda_s}$. Lalesco détache du noyau la partie

$$a_0(x) + a_1(x)\frac{(y-x)}{1\,!} + \ldots + a_n(x)\frac{(y-x)^n}{n\,!}$$

qui, si elle était seule, donnerait l'équation (47) notablement plus compliquée et dont les solutions fondamentales ne sont pas connues en termes finis. Elle aura de ce fait un désavantage s'il s'agit d'avoir *effectivement* la ou les solutions d'une équation du type étudié.

b. Lalesco introduit effectivement, dans son analyse, l'équation différentielle (47). Sa méthode s'appliquerait à des conditions plus larges que l'analyticité, postulée plus haut, de $f(x, y)$ et $h(y)$, mais elle implique du moins essentiellement, pour amener l'équation (46), $(n+1)$ dérivations de (25) : il faut donc faire des hypothèses sur les dérivées de $f(x, y)$ et $h(y)$ par rapport à y jusqu'à l'ordre $n+1$, hypothèses qui n'interviennent pas dans la méthode de M. Volterra.

Cette dernière méthode s'applique donc sous des conditions un

peu plus larges, elle est plus directe et, au fond, plus élémentaire.

27. Méthode de M. Pérès. — Tout récemment M. Pérès a donné une autre méthode qui se rattache à celle de Volterra-Holmgren et qui a les mêmes avantages (elle est cependant moins directe) tout en étant d'un exposé très simple ([1]). Cette méthode permet d'ailleurs d'éviter la restriction initiale que les racines de E soient distinctes.

L'équation (26) du n° 15 s'écrit

$$(26') \qquad \varphi(y) - \int_0^1 \varphi(\xi)\, M(\xi, y)\, d\xi = N(y)$$

avec

$$M(x, y) = -\frac{f'_y(x, y)}{f(y, y)}, \qquad N(y) = \frac{h'(y)}{f(y, y)},$$

et l'on a

$$M(x, y) = m(x, y) + \bar{m}(x, y)$$

avec

$$(49) \qquad m(x, y) = -\frac{1}{y}\sum_0^n (n-i)\, a_i \left(\frac{x}{y}\right)^i \frac{1}{\Sigma_i a_i},$$

$\bar{m}(x, y)$ et $N(y)$ *étant bornés d'après les hypothèses du début.* M. Pérès montre que l'on peut faire disparaître par récurrence la partie non bornée du noyau $m(x, y)$ en se ramenant ainsi à une équation intégrale à noyau borné, à laquelle s'appliqueront les méthodes du Chapitre précédent.

Tout repose sur le lemme suivant :

Faisons correspondre au noyau $m(x, y)$ donné par (49) (*avec $\Sigma_i a_i \neq 0$ et, ce qui ne restreint rien, $a_n \neq 0$*) *l'équation*

$$(E) \qquad \frac{a_0}{\lambda - 1} + \frac{a_1}{\lambda - 2} + \ldots + \frac{a_n}{\lambda - n - 1} = 0.$$

Cette équation, rendue entière (en faisant attention aux lacunes possibles dans la suite des a_i) *sera exactement de degré p si p des coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ne sont pas nuls. Soit λ_1 l'une de ses racines et r le plus grand entier inférieur à n tel que $a_r \neq 0$. Soit*

([1]) *Cf.* Pérès, [76']; on se reportera à ce Mémoire pour plus de détails et pour les démonstrations, seulement indiquées dans le texte.

les deux noyaux.

$$\mu(x, y) = (\lambda_1 - r - 1)\frac{x^{\lambda_1 - 1}}{y^{\lambda_1}}, \qquad \nu(x, y) = (r + 1 - \lambda_1)\frac{x^r}{y^{r+1}}$$

qui sont résolvant l'un de l'autre, on aura, pour $0 < x \leq y$ (égalité avec zéro exclue),

$$(50) \qquad \left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{m}\right)\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{\mu}\right) = \overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{m}_1,$$

ou, ce qui est équivalent,

$$(50') \qquad \left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{m}\right) = \left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{m}_1\right)\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{\nu}\right),$$

$m_1(x, y)$ *étant un noyau de même forme que* $m(x, y)$,

$$(51) \qquad m_1(x, y) = -\frac{1}{y}\sum_{0}^{r}{}_i (r - i)a'_i\left(\frac{x}{y}\right)^i \frac{1}{\Sigma a'_i} \qquad (\Sigma_i a'_i \neq 0,\ a'_r \neq 0)$$

avec

$$a'_i = \frac{a_i(n - i)}{\lambda_1 - i - 1}.$$

L'équation analogue à (E) *formée avec les coefficients* a'_i *coïncide avec* (E) *débarrassée d'un facteur* $\lambda - \lambda_1$.

Ceci posé, convenons de désigner par un indice inférieur 0, des compositions effectuées avec une limite inférieure égale à 0. L'équation (26') peut s'écrire

$$(26'') \qquad \overset{*}{\varphi}\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{m}\right)_0 = \mathrm{N} + \overset{*}{\varphi}\,\overset{*}{\bar{m}}_0$$

et, si λ_1 est une racine de (E) ayant sa partie réelle positive, il n'y a pas d'obstacle à composer à droite par $\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{\mu}\right)$ et à profiter des règles usuelles de composition malgré la limite inférieure d'intégration zéro. D'après (50) le premier membre de (26'') devient $\varphi\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{m}_1\right)_0$ et l'on est ainsi ramené à une équation de même type que celle dont on est parti, équivalente mais plus simple, parce que la partie non bornée du noyau, m_1 donne une équation analogue à (E) mais avec le facteur $\lambda - \lambda_1$ en moins.

Si (E) a une autre racine, distincte ou non de λ_1 ayant sa partie réelle positive, on la fera disparaître de même et ainsi de suite.

Lorsque toutes les racines de (E) ont leur partie réelle positive, on

élimine ainsi entièrement la partie non bornée m du noyau M et l'on est ramené à une équation de Volterra de seconde espèce dont le noyau et le second membre sont bornés et à laquelle s'applique la solution usuelle.

Dans tous les cas le procédé de réduction précédent permet de se ramener à une équation de même type que l'équation initiale (26″), la correspondante (E) ayant des racines dont les parties réelles sont négatives ou nulles.

Laissons de côté le cas des parties réelles nulles [1], nous avons à réduire (26″) lorsque l'équation (E) n'a que des racines à parties réelles négatives.

λ_1 étant une de ces racines, on ne peut plus effectuer la composition précédente par $\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{\mu}\right)$, la limite inférieure d'intégration étant zéro. Mais il n'y a point d'obstacle à écrire le premier membre de (26″) sous la forme

$$\overset{*}{\varphi}\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{m}_1\right)\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{\nu}\right)$$

et, en posant pour un instant

$$\overset{*}{\varphi}\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{m}_1\right)_0 = \omega(y),$$

(26″) s'écrit

$$\omega(y) - \int_0^y \omega(\zeta)(r+1-\lambda_1)\frac{\zeta^r}{y^{r+1}}\,d\zeta = \mathrm{N}(y) - \int_0^y \varphi(\zeta)\,\overline{m}(\zeta, y)\,d\zeta,$$

d'où, en posant $\int_0^y \omega(\zeta)\zeta^r\,d\zeta = \chi(y)$ et désignant par L(y) le second membre que l'on suppose connu pour un instant, une équation différentielle

$$y\frac{d\chi}{dy} - (r+1-\lambda_1)\chi = y^{r+1}\,\mathrm{L}(y),$$

d'où

$$\chi(y) = -y^{r+1-\lambda_1}\int_y^{y_0} \eta^{\lambda_1 - 1}\,\mathrm{L}(\eta)\,d\eta + \alpha y^{r+1-\lambda_1},$$

α étant une constante arbitraire, et $y_0 \neq 0$ étant choisi *ad libitum*.

---

(1) On constate facilement, comme l'indique Lalesco, que, suivant la façon dont se comporte le second membre pour $y = 0$, ces racines peuvent être traitées comme des racines à partie réelle positive ou négative.

Revenant à φ on a l'équation, équivalente à (26''),

$$(26''')\quad \overset{*}{\varphi}\left(\overset{*}{1}{}^0 - \overset{*}{m}_1\right)_0 = \int_0^y \varphi(\zeta)\overline{m}_1(\zeta, y)\,d\zeta + \int_y^{y_0} \varphi(\zeta)\overline{n}_1(\zeta, y)\,d\zeta + N_1(y),$$

où $\overline{m}_1$, $\overline{n}_1$, N_1 sont des fonctions bornées que l'on évalue aisément en fonction de $\overline{m}$ et de N; N_1 contenant d'ailleurs la constante arbitraire α.

La réduction est ainsi effectuée, le noyau non borné m_1 donne une équation E où la racine utilisée λ_1 a disparu; seulement (26''') n'est pas exactement de même forme que (26'').

Mais si l'on applique à nouveau la méthode, les équations réduites suivantes restent du type (26'''), de sorte qu'on arrivera ainsi à faire disparaître le noyau non borné. On aura finalement une équation du type

$$\varphi(y) - \int_0^y \varphi(\zeta)\overline{m}_p(\zeta, y)\,d\zeta - \int_y^{y_0} \varphi(\zeta)\overline{n}_p(\zeta, y)\,d\zeta = N_p(y),$$

exactement semblable à l'équation (44) de M. Holmgren et que l'on traitera par approximations successives en prenant y_0 assez petit et $0 \leq y \leq y_0$ (¹).

Chaque racine de (E) ayant sa partie réelle négative donne une constante arbitraire de sorte que l'on justifie bien ainsi l'énoncé du théorème V. Le fait que l'équation (E) a des racines simples ou multiples n'intervient en aucune façon dans la méthode de réduction précédente. On l'appliquera en prenant successivement toutes les racines de (E), chacune avec son ordre de multiplicité.

28. Indications sur les cas qui échappent à l'analyse précédente. — L'hypothèse du début $\Sigma_i a_i \neq 0$ est essentielle. On s'en rend compte clairement dans la méthode de Lalesco : l'équation différentielle (48), sur laquelle reposent les approximations successives ne sera du type de Fuchs que si $\Sigma_i a_i \neq 0$. On retrouvera donc, pour traiter le cas où $\Sigma_i a_i$ est nul, les difficultés que l'on rencontre dans l'étude d'une équation différentielle au voisinage d'un point singulier pour lequel elle n'a pas le type de Fuchs.

(¹) Par le procédé de prolongement du n° 15 on pourra passer à un intervalle plus grand de valeurs de la variable.

M. Holmgren, puis Lalesco ont étudié le cas d'un noyau de forme

$$f(x, y) = m(y - x) + \psi(x, y),$$

m étant une constante et $\psi(x, y)$ n'ayant pas de termes du premier degré en x et y de sorte que $f(x, y)$ commence par des termes du second degré. D'importantes études sur le même sujet ont été faites par M. J. Horn (¹).

III. — RÉSULTATS GÉNÉRAUX CONCERNANT LES NOYAUX NON BORNÉS. CAS OÙ L'INTERVALLE D'INTÉGRATION EST INFINI.

29. Au paragraphe I nous avons étudié une catégorie notable de noyaux non bornés. Nous avons ensuite rencontré d'autres noyaux non bornés, de types différents : l'équation (25) (nº **15**) de première espèce donne, par dérivation, l'équation de seconde espèce (26) qui, sous les conditions A et B du nº **16**, a son noyau de forme

$$\frac{f'_y(x, y)}{f(y, y)} = \frac{F(x, y)}{y},$$

$F(x, y)$ étant bornée dans le champ $0 \leqq x \leqq y \leqq l$.

De très nombreux travaux ont été consacrés à l'application des méthodes générales au cas de noyaux non bornés ainsi qu'à l'étude des cas qui échappent à ces méthodes. Nous nous bornerons à quelques indications générales.

30. Noyaux absolument intégrables. — Signalons d'abord les recherches de M. G. C. Evans qui traite l'équation de seconde espèce

$$\varphi(y) - \int_a^b \varphi(\zeta) f(\zeta, y)\, d\zeta = h(y),$$

$a \leqq y \leqq b$, en posant des conditions assez larges concernant les discontinuités possibles du noyau $f(x, y)$ et du second membre $h(y)$. M. Evans démontre que l'équation en question a toujours une seule solution bornée sous des conditions telles que les suivantes :

(¹) *Cf.* Holmgren, [45]; Lalesco, [53]; Horn, [46].

α. La fonction $h(y)$ est bornée;

β. L'intégrale $\int_a^y |f(\zeta, y)|\, d\zeta$ est convergente (sauf éventuellement pour des valeurs isolées de y) et bornée par un nombre M;

γ. L'intervalle (a, b) peut être divisé en un nombre fini d'intervalles partiels par des points de division $a_0 = a, a_1, \ldots, a_k = b$ tels que l'on ait des inégalités de type $\int_{a_i}^y |f(\zeta, y)|\, d\zeta \leqq H < 1$, pour $a_i \leqq y \leqq a_{i+1}$.

Pour plus de détails on se reportera aux Mémoires de M. Evans [1] où l'on trouvera d'autres résultats analogues. Le lecteur traitera d'ailleurs sans peine le cas où $\int_a^y |f(\zeta, y)|\, d\zeta \leqq H < 1$ quel que soit y dans l'intervalle (a, b) : la série que donne la méthode des approximations successives (*cf.* Chap. VI, n° 11) est absolument et uniformément convergente et donne la solution bornée de l'équation proposée.

Dans le même ordre d'idées supposons [2] qu'il existe une fonction positive et *sommable* $\omega(x)$ telle que l'on ait (presque partout)

$$|f(x, y)| \leqq \omega(x), \qquad a \leqq x \leqq y \leqq b.$$

On a alors

$$\left|\overset{*}{f}{}^2\right| < \omega(x) \int_x^y \omega(\xi)\, d\xi,$$

$$\left|\overset{*}{f}{}^3\right| < \omega(x) \int_x^y \omega(\eta)\, d\eta \int_x^\eta \omega(\xi)\, d\xi = \frac{\omega(x)}{2!} \left[\int_x^y \omega(\xi)\, d\xi\right]^2,$$

comme on le vérifie de suite, enfin

$$\left|\overset{*}{f}{}^n\right| < \frac{\omega(x)}{(n-1)!} \left[\int_x^y \omega(\xi)\, d\xi\right]^{n-1}.$$

La série du noyau résolvant

$$\overset{*}{g} = -\left(f + \overset{*}{f}{}^2 + \ldots + \overset{*}{f}{}^n + \ldots\right)$$

est alors convergente et il n'y a pas de difficulté à vérifier directement

---

(1) Evans, [23]-[24].

(2) E. Hille et J. D. Tamarkin, [43].

que l'on a toujours

$$\overset{*}{g}+\overset{*}{f}=\overset{*}{g}\overset{*}{f}=\overset{*}{f}\overset{*}{g}.$$

Admettant enfin que le second membre h est tel que la fonction $|h(\xi)|\omega(\xi)$ soit sommable et en se limitant aux solutions φ qui satisfont à une condition analogue, on vérifie que l'équation proposée a une solution unique donnée au moyen du noyau résolvant :

$$\varphi(y)=h(y)-\int_0^y h(\xi)\,g(\xi,y)\,d\xi.$$

31. Noyau non intégrable. — Prenons l'équation ([1]),

$$(52)\qquad \varphi(y)-\int_a^y \varphi(\xi)\frac{f(\xi,y)}{m(\xi)}\,d\xi=h(y),$$

où la fonction f est bornée en module par le nombre H et où $m(\xi)$ est une fonction, continue pour $a\leqq\xi\leqq b$, ayant la racine isolée $\xi=a$ *et telle que*

$$\lim_{x=a}\int_x^y \frac{d\xi}{m(\xi)}$$

n'existe pas. Nous pouvons toujours supposer $m(\xi)>0$ $(a<\xi\leqq b)$ et $H<1$ [en modifiant au besoin $m(\xi)$ par un facteur constant].

Prenons dans (52),

$$\varphi(y)=r(y)\,\psi(y),$$

où $r(y)$ est une fonction qui sera choisie ultérieurement. Il vient

$$(52')\qquad \psi(y)-\int_a^y \psi(\xi)\frac{r(\xi)}{m(\xi)\,r(y)}f(\xi,y)\,d\xi=\frac{h(y)}{r(y)},$$

et l'on peut chercher à choisir $r(y)$ de façon que les résultats du numéro précédent s'appliquent. Prenons

$$r(y)=e^{-\int_y^b \frac{d\xi}{m(\xi)}},$$

le noyau de (52′) s'écrira

$$\overline{f}(x,y)=\frac{f(x,y)}{m(x)}\,e^{-\int_x^y \frac{d\xi}{m(\xi)}}.$$

([1]) G. C. Evans, [21].

d'où

$$\int_a^y |f(\zeta, y)|\,d\zeta < \mathrm{H}\int_a^y \frac{d\zeta}{m(\zeta)} e^{-\int_\zeta^y \frac{d\xi}{m(\xi)}} = \mathrm{H}\int_{-\infty}^0 e^u\,du = \mathrm{H} < 1;$$

pourvu que $h(y)e^{\int_y^b \frac{d\zeta}{m(\zeta)}}$ reste finie quand y tend vers a on aura (*cf.* n° 30) une solution bornée $\psi(y)$ de (52'), d'où une solution de (52)

$$\varphi(y) = \psi(y)\,e^{-\int_y^b \frac{d\zeta}{m(\zeta)}},$$

tendant d'ailleurs vers zéro quand y tend vers a.

La méthode suivie n'établit pas l'unicité. On peut constater que, sous des conditions de dérivabilité de f, elle dépend du signe de $f(a, a)$.

32. Équations où l'intervalle d'intégration est infini. — De telles équations seront de la forme

$$(53) \qquad \varphi(y) - \int_{-\infty}^{y} \varphi(\xi) f(\xi, y)\,d\xi = h(y)$$

ou bien

$$(53') \qquad \varphi(x) - \int_{x}^{+\infty} f(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi = h(x),$$

l'inconnue étant φ. Il n'y a d'ailleurs qu'une différence de notation entre les deux types.

Nous prendrons d'abord un cas particulier que M. Volterra a rencontré dans ses recherches sur l'hérédité [1]. Ce sera celui de l'équation

$$(54) \qquad \varphi(y) - \int_{-\infty}^{y} \varphi(\zeta) f(y-\zeta)\,d\zeta = h(y),$$

où le noyau ne dépend que de la différence $y - \zeta$. Si la limite inférieure d'intégration était finie et égale à a, on aurait la solution par les formules du Chapitre VI en faisant intervenir le noyau résolvant

$$(55) \qquad g(y - r) = -\left(f + \overset{*}{f}{}^2 + \ldots\right).$$

(1) VOLTERRA, [132].

Il est tout à fait immédiat que si l'on pose

$$f(y-x) = e^{-(\lambda+\varepsilon)(y-x)}\bar{f}(y-x)$$

et, g étant le noyau résolvant défini par (55), si l'on prend de même

$$g(y-x) = e^{-(\lambda+\varepsilon)(y-x)}\bar{g}(y-x),$$

λ et ε étant des constantes positives, $\bar{g}$ *sera le noyau résolvant de* $\bar{f}$.

Faisons alors l'hypothèse que

$$|\bar{f}(y-x)| < \lambda, \qquad 0 < y-x < \infty,$$

d'où

$$\left|\bar{f}^n(y-x)\right| < \frac{\lambda^n(y-x)^{n-1}}{(n-1)!}$$

et, enfin, de (55),

$$|\bar{g}(y-x)| < \lambda e^{\lambda(y-x)}.$$

Les noyaux f et g vérifient alors les inégalités

$$|f| < \lambda e^{-(\lambda+\varepsilon)(y-x)}, \qquad |g| < \lambda e^{-\varepsilon(y-x)},$$

$$\int_{-\infty}^{y} |f(y-\zeta)|\, d\zeta < \frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon} < 1, \qquad \int_{-\infty}^{y} |g(y-\zeta)|\, d\zeta < \frac{\lambda}{\varepsilon}.$$

Le *principe d'inversion* du Chapitre VI s'applique alors si le second membre $h(y)$ est borné pour $-\infty < y \leq a$ et l'on a une solution de (54) sous la forme

$$\varphi(y) = h(y) - \int_{-\infty}^{y} h(\zeta) g(y-\xi)\, d\zeta,$$

également *bornée*.

On peut d'ailleurs vérifier que la fonction φ précédente est la seule solution bornée de (54). Dans le cas contraire il existerait une fonction $\psi(y)$ telle que $|\psi(y)| < M$ et que

$$\psi(y) = \int_{-\infty}^{y} \psi(\zeta) f(y-\zeta)\, d\zeta,$$

d'où, d'après l'une des inégalités précédentes

$$|\psi| < M\frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon}$$

et, en répétant le procédé,

$$|\psi| < M\left(\frac{\lambda}{\lambda+\varepsilon}\right)^n,$$

n étant un entier positif quelconque. Il en résulte que $\psi(y)$ est forcément identiquement nulle.

33. Nous venons de voir un cas où l'on pouvait utiliser, de façon presque immédiate, le *principe d'inversion* du Chapitre VI. Il pourra arriver qu'il soit commode d'employer un changement de variables ramenant l'intervalle à être fini.

Nous en avons déjà vu un exemple (n° 9). Prenons en général l'équation (53) et posons

$$\frac{1}{y} = Y, \qquad \frac{1}{\xi} = \zeta, \qquad \varphi\left(\frac{1}{Y}\right) = \Phi(Y), \qquad h\left(\frac{1}{Y}\right) = H(Y).$$

Elle devient

$$\Phi(Y) = -\int_0^Y \Phi(\zeta)\frac{f\left(\frac{1}{\zeta}, \frac{1}{Y}\right)}{\zeta^2}\,d\zeta + H(Y)$$

où l'intervalle d'intégration est fini, mais où le noyau n'est pas *borné*. en général. Tous les résultats sur les noyaux non bornés donneront donc des résultats concernant des équations de type (53) et (53').

Nous pouvons donc nous limiter à de brèves indications. Voici, par exemple, un résultat de M. Evans que nous laissons au lecteur le soin de justifier; soit l'équation (53) dans laquelle : a, $h(y)$ et $f(x, y)$ sont bornées et continues; b, l'intégrale $\int_{-\infty}^{y} |f(\zeta, y)|\,d\xi$ existe; c, il existe une valeur y_0 telle que $\int_{-\infty}^{y} |f(\zeta, y)|\,d\xi < N < 1$, quel que soit y inférieur à y_0. Dans ces conditions, *les approximations successives convergent et donnent une fonction* $\varphi(y)$ *qui est la seule solution bornée de l'équation* (53).

34. Ici, aussi bien qu'au n° 32, la condition que les solutions envisagées sont bornées est essentielle pour l'unicité. Il est facile de s'en convaincre par un exemple.

Soit l'équation homogène

$$(56) \qquad \varphi(y) = A\int_{-\infty}^{y} e^{-B(y-\xi)}\varphi(\xi)\,d\xi,$$

où A et B sont des constantes que l'on a choisies arbitrairement. On

en tire, en multipliant par e^{By} et en dérivant

$$\varphi'_y(y) + (B - A)\varphi(y) = 0.$$

Toutes les solutions de (56) sont donc de forme $ke^{(A-B)y}$ où k est une constante arbitraire et, portant dans (56), on constate que cette équation est effectivement vérifiée par $ke^{(A-B)y}$, pourvu que A soit positif.

L'équation (56) admet donc la solution unique $\varphi(y) = 0$ si $A < 0$, une infinité de solutions avec l'arbitraire k si $A > 0$.

Or le noyau de (56) vérifie les conditions a, b, c du numéro précédent si $B > 0$ et $\left|\frac{A}{B}\right| < 1$. Dans ce cas nous avons bien toujours la seule solution bornée $\varphi(y) = 0$ puisque, si $A < 0$, c'est la seule solution de (56) et que, si $A > 0$, on a $A - B < 0$ et toute fonction $ke^{(A-B)y}$ devient infinie pour $y = -\infty$.

L'exemple précédent montre de plus que, si l'on n'impose pas au noyau des conditions (dont a, b, c donnent un exemple), une équation (53) ou (53′) peut fort bien avoir une infinité de solutions, et même de solutions bornées (cas $A > 0$, $B < A$) (¹).

35. Des conditions plus larges que celles du n° 33 ont été étudiées par C. E. Love (²), dont nous indiquerons pour terminer quelques résultats.

Si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{y} |h(\zeta) f(\zeta, y)|\, d\zeta$$

converge uniformément dans tout domaine fini de valeurs de y, et si elle est inférieure à $\theta \cdot |h(y)|$, où θ est une constante inférieure à 1 et indépendante de y, alors (53) a une solution de forme

$$\varphi(y) = h(y)\rho(y)$$

où ρ vérifie l'inégalité

$$|\rho(y)| < \frac{1}{1-\theta}.$$

Il ne peut naturellement plus être question d'unicité.

Si les hypothèses précédentes ne sont vérifiées que pour des valeurs

(¹) On pourra consulter à ce sujet d'intéressantes notes de M. Kostitzin [51] et [52].

(²) *Cf.* Love, [68]. Pour toutes les questions envisagées dans ce paragraphe, *voir* aussi Davis, [20].

assez grandes de $-y$, par exemple pour

$$y < -y_0$$

on pourra procéder par *prolongement* (comme au début du paragraphe II) pour obtenir une solution valable lorsque y dépasse $-y_0$.

On écrira l'équation proposée

$$(53_1) \qquad \varphi(y) = h_1(y) + \int_{-y_0}^{y} \varphi(\xi) f(\xi, y)\, d\xi,$$

avec

$$h_1(y) = h(y) + \int_{-\infty}^{-y_0} \varphi(\xi) f(\xi, y)\, d\xi.$$

Une fonction $\varphi(y)$ étant connue pour $y < -y_0$ on a $h_1(y)$ et l'on est ramené à l'équation de Volterra (53_1), où l'intervalle d'intégration est fini, pour déterminer $\varphi(y)$ quand $y > -y_0$.

IV. — ÉQUATIONS DITES « INTÉGRO-FONCTIONNELLES ».

36. On désigne assez souvent sous le nom d'*équations fonctionnelles* des équations où intervient, non seulement la fonction inconnue $\varphi(y)$, mais les fonctions que l'on en déduit en effectuant une substitution sur la variable y : $y / \alpha y$ dans le cas le plus simple. Cette dénomination peut prêter à confusion avec les *équations fonctionnelles* générales envisagées au Chapitre VI (§ I). Nous la suivrons cependant dans ce paragraphe, où il ne peut y avoir aucune ambiguïté et nous nommerons *intégro-fonctionnelles* des équations *fonctionnelles* au sens précédent et où de plus l'inconnue figure sous un signe d'intégration.

La plus simple est la suivante :

$$(1) \qquad \varphi(y) - P(y)\varphi(\alpha y) - \lambda \int_0^y \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = h(y),$$

où α est une constante, que nous supposerons comprise entre zéro et 1, où $P(y)$, $h(y)$, $K(x, y)$ sont des fonctions données, $\varphi(y)$ l'inconnue, λ un paramètre constant qu'il est commode d'introduire pour l'application de la méthode des approximations successives.

L'équation (1) a été résolue par M. Picard [1] qui y ramène le pro-

---

(1) PICARD, [73].

blème suivant : détermination d'une intégrale d'une équation aux dérivées partielles du second ordre prenant des valeurs assignées sur deux courbes données. Elle a été étudiée, ainsi que des équations analogues, par MM. Lalesco, Myller, Picone, Popovici, Tamarkin, Adams ([1]).

37. Admettons d'abord que le noyau $K(x, y)$ soit nul; il reste l'équation « fonctionnelle »

$$\varphi(y) - P(y)\varphi(\alpha y) = h(y) \quad (0 < \alpha < 1) \tag{2}$$

qu'il est naturel d'étudier d'abord.

Remplaçons dans (2) y par αy, puis $\alpha^2 y$, etc. Nous avons la suite d'équations :

$$\left\{\begin{array}{lll} \varphi(y) & - P(y) \quad \varphi(\alpha y) & = h(y), \\ \varphi(\alpha y) & - P(\alpha y) \quad \varphi(\alpha^2 y) & = h(\alpha y), \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \\ \varphi(\alpha^n y) & - P(\alpha^n y)\,\varphi(\alpha^{n+1} y) & = h(\alpha^n y), \\ \multicolumn{3}{l}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,} \end{array}\right. \tag{3}$$

qui sont toutes satisfaites par une solution quelconque de (2). En les multipliant respectivement par 1, $P(y)$, $P(y)P(\alpha y)$, ..., et ajoutant, il vient

$$\varphi(y) - P(y)P(\alpha y)\dots P(\alpha^n y)\varphi(\alpha^{n+1} y) = \sum_0^n {}_i\, h(\alpha^i y) \prod_{l=0}^{l=i-1} P(\alpha^l y). \tag{4}$$

Pour aller plus loin nous poserons les conditions suivantes : $h(y)$ *est nulle pour* $y = 0$ *et, dans l'intervalle* $0 \leq y \leq l$ *où nous cherchons une solution de* (2), *on a*

$$|h(y)| \leq Ky, \tag{5}$$

K *étant une constante. D'autre part nous supposerons que le produit*

$$\Pi_n(y) = P(y)P(\alpha y)\dots P(\alpha^n y)$$

est uniformément convergent et a pour limite $\Pi(y)$ *dans le même intervalle de valeurs de* y [c'est ce qui aura lieu, par exemple, s'il

(1) *Cf.* [53], [75,] [83]-[84], [89]-[91], [107], [3].

existe une constante H telle que

$$1 \leqq P(y) < e^{Hy},$$

d'où $P(0) = 1$].

Ajoutons enfin une condition pour la fonction inconnue $\varphi(y)$ que *nous supposerons continue pour la valeur zéro de la variable* et donnons-nous sa valeur $\varphi(0) = a$.

L'équation (4) entraîne alors, si l'on fait tendre n vers l'infini,

$$(6) \qquad \varphi(y) = a\Pi(y) + \sum_{j}^{\infty} h(\alpha^j y)\,\Pi_{j-1}(y) \qquad (\Pi_{-1} = 1).$$

La série au second membre étant uniformément et absolument convergente d'après (5). On vérifie d'ailleurs sans peine que (6) satisfait bien l'équation (2) et en donne donc la solution, *unique sous les conditions posées*. telle que $\varphi(0) = a$.

38. A côté des solutions ainsi obtenues pour l'équation (2), solutions qui sont continues pour $y = 0$, on peut former aisément d'autres solutions qui ont pour $y = 0$ une singularité que l'on peut dire essentielle et dont l'existence a été remarquée par M. Popovici [1].

Il suffit de traiter à ce point de vue l'équation homogène

$$(2') \qquad \varphi(y) - P(y)\,\varphi(\alpha y) = 0.$$

Elle a manifestement la solution $\varphi = \Pi(y)$. Posons

$$\varphi(y) = \Pi(y)\,v(y),$$

il viendra

$$\Pi(y)\,v(y) - P(y)\,\Pi(\alpha y)\,v(\alpha y) = 0,$$

d'où

$$v(y) = v(\alpha y),$$

Cette condition exprime simplement que la fonction de t obtenue en prenant

$$y = e^t$$

admet la période $T = \log\alpha$. On pourra donc prendre une fonction arbitraire $V(t)$ ayant la période T et une solution de (2') est

$$\varphi(y) = \Pi(y)\,V(\log y).$$

La fonction ainsi obtenue ne peut être continue pour $y = 0$ ($t = -\infty$)

---

(1) Nous suivons ici une analyse un peu différente; de même plus bas n° 41.

que si V se réduit à une constante, ce qui nous fait retrouver l'arbitraire de la solution (6).

39. Revenons maintenant à l'équation « intégro-fonctionnelle » (1) et recherchons une solution de forme

$$\varphi(y) = \varphi_0(y) + \lambda\varphi_1(y) + \ldots + \lambda^n\varphi_n(y) + \ldots.$$

On a, pour déterminer les coefficients de la série, les équations

$$(7)\quad \begin{cases} \varphi_0(y) - P(y)\varphi_0(\alpha y) = h(y), \\ \varphi_1(y) - P(y)\varphi_1(\alpha y) = \displaystyle\int_0^y \varphi_0(\xi)K(\xi, y)\,d\xi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \varphi_n(y) - P(y)\varphi_n(\alpha y) = \displaystyle\int_0^y \varphi_{n-1}(\xi)K(\xi, y)\,d\xi, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

dont chacune est du type (2).

En se bornant à la solution, continue pour $y = 0$, obtenue au n° 37, on aura

$$(8)\quad \varphi_n(y) = \varphi_n(0)H(y) + \Phi_n(y) + P(y)\Phi_n(\alpha y) + P(y)P(\alpha y)\Phi_n(\alpha^2 y) + \ldots$$

avec

$$\Phi_n(y) = \int_0^y \varphi_{n-1}(\xi)K(\xi, y)\,d\xi,$$

et, en imposant à la solution cherchée de prendre la valeur a pour $y = 0$, on aura

$$\varphi_0(0) = a, \qquad \varphi_n(0) = 0 \qquad (n \neq 0).$$

Dès lors la première des (8) entraîne que $\varphi_0(y)$ soit bornée dans l'intervalle $0 \leq y \leq l$; posons

$$|\varphi_0(x)| \leq N,$$

désignons par M et H des limites supérieures de $|K(x, y)|$ $(0 \leq x \leq y \leq l)$ et de $|H_n(y)|$. Nous aurons

$$|\Phi_1(y)| < NMy,$$

d'où, puisque $\varphi_1(0) = 0$ et, d'après la seconde des (8),

$$|\varphi_1(y)| < MNHy(1 + \alpha + \alpha^2 + \ldots) = \frac{NMHy}{1-\alpha}.$$

De même

$$|\varphi_n(y)| < \frac{N}{n!} \frac{M^n H^n y^n}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)}.$$

La série

$$\varphi_0(y) + \lambda\varphi_1(y) + \dots$$

est donc absolument et uniformément convergente et *elle définit une solution de* (1) *continue pour* $y = 0$ *et prenant la valeur* a pour $y = 0$.

40. Sous les hypothèses de continuité qui ont été faites, la solution qui prend la valeur a pour $y = 0$ est *unique*.

S'il y avait en effet deux solutions, leur différence vérifierait l'équation homogène

$$(9) \qquad \varphi(y) - P(y)\varphi(\alpha y) - \lambda \int_0^y \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = 0$$

avec $\varphi(0) = 0$. Or en désignant par L le maximum du module d'une solution de (9) on a, compte tenu de (6),

$$|\varphi(y)| < \lambda \frac{LMHy}{1-\alpha},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$|\varphi(y)| < \frac{\lambda^n}{n!} \frac{L^n M^n H^n y^n}{(1-\alpha)(1-\alpha^2)\dots(1-\alpha^n)},$$

qui est arbitrairement petit avec n; donc $\varphi(y)$ est identiquement nulle.

41. De ce que l'on a vu pour l'équation (2), il est à prévoir que le théorème d'unicité disparaît si l'on supprime l'hypothèse de continuité de la solution pour $y = 0$. C'est là un résultat notable dû également à M. Popovici.

Pour l'établir nous procéderons de la façon suivante. L'équation homogène (9) s'identifie avec (2) en prenant

$$h(y) = \lambda \int_0^y K(\xi, y)\varphi(\xi)\, d\xi$$

et elle équivaut donc à

$$\varphi(y) = \Pi(y) v(y) + \lambda \sum_i^{\infty} \int_0^{\alpha^i y} \varphi(\xi) K(\xi, \alpha^i y)\, d\xi\, \Pi_{i-1}(y).$$

$v(y)$ étant une fonction arbitraire telle que (n° 38)

$$v(y) = v(\alpha y).$$

On obtient ainsi l'équation

$$(10) \qquad \varphi(y) = v(y)\mathrm{H}(y) + \lambda \int_0^y \varphi(\xi)\mathrm{L}(\xi, y)\,d\xi,$$

en prenant

$$\begin{aligned} \mathrm{L}(\xi, y) &= \mathrm{K}(\xi, y) & \text{pour} \quad & \alpha y < \xi < y \\ &= \mathrm{K}(\xi, y) + \mathrm{K}(\xi, \alpha y)\mathrm{H}_0(y) & \text{pour} \quad & \alpha^2 y < \xi < \alpha y \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots \\ &= \sum_0^r {}_j \mathrm{K}(\xi, \alpha^j y)\mathrm{H}_{j-1}(y) & \text{pour} \quad & \alpha^{r-1} y < \xi < \alpha^r y. \end{aligned}$$

L'équation (10) est une équation ordinaire de Volterra. Le terme connu $v(y)\mathrm{H}(y)$ présentera, avec $v(y)$, une singularité pour $y = 0$, mais cette singularité est sans importance pour l'application de la méthode usuelle de résolution, si, par exemple, $v(y)$ est continue sauf pour $y = 0$; d'autre part le noyau $\mathrm{L}(\xi, y)$ n'est pas borné en général mais les expressions précédentes entraînent que

$$|\mathrm{L}(\xi, y)| < \mathrm{M}_1 \log \frac{y}{\xi} + \mathrm{M}_2,$$

de sorte qu'il n'y a pas de difficulté à définir le noyau résolvant.

On obtiendra donc pour (9) une infinité de solutions avec la fonction arbitraire $v(y)$ vérifiant

$$v(y) = v(\alpha y)$$

et qui peut être prise *ad libitum* dans un intervalle y_0, αy_0.

42. Des généralisations sont évidentes, en remplaçant par exemple la substitution $y \mid \alpha y$ par une substitution quelconque $y \mid u(y)$, où u désigne une fonction par exemple finie et continue. On a ainsi l'équation

$$(11) \qquad \varphi(y) - \mathrm{P}(y)\varphi(u(y)) - \lambda \int_0^y \varphi(\xi)\mathrm{K}(\xi, y)\,d\xi = h(y),$$

qui pourra se traiter de façon assez analogue à (1) et qui a été envisagée, en particulier, par MM. Myller et Picone.

On peut enfin envisager des équations où figure la substitution $y \mid u(y)$ itérée. Posant pour abréger

$$y_1 = u(y), \qquad y_2 = u(y_1), \qquad \ldots,$$

les équations seront du type

(12) $$\varphi(y) - P_1(y)\varphi(y_1) - \ldots - P_k(y)\varphi(y_k) - \lambda \int_0^y \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = h(y),$$

(12) se réduit à (1) pour $k = 1$ et $y_1 = \alpha y$.

Nous n'insisterons pas sur leur étude, nous contentant de remarquer que l'application des approximations successives conduit à des équations « fonctionnelles » de forme

(12′) $$\varphi(y) - P_1(y)\varphi(y_1) - \ldots - P_k(y)\varphi(y_k) = h(y),$$

pour lesquelles M. Popovici note un parallélisme intéressant avec les équations différentielles linéaires telles que

(13) $$\varphi - P_1(y)\frac{d\varphi}{dy} - \ldots - P_k(y)\frac{d^k\varphi}{dy^k} = h(y).$$

La solution de (13) dépend linéairement de k constantes arbitraires. Celle de (12′) dépendra de même de k fonctions arbitraires [analogues à la fonction $v(y)$ introduite au n° 38 pour $k = 1$].

V. — ÉQUATIONS DE VOLTERRA AVEC LES DEUX LIMITES DE L'INTÉGRALE VARIABLES (¹).

43. Soit d'abord l'équation de *seconde espèce*

(14) $$\varphi(y) + \int_{-y}^{+y} \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = f(y),$$

où f est donnée dans un intervalle $-b < y < b$ et où $K(x, y)$ est donné pour

$$-b \leqq y \leqq +b,$$
$$-y \gtrless x \lesseqgtr +y.$$

En reprenant (14), où l'on sépare en deux parties l'intégrale et en écrivant la même équation avec changement de y en $-y$, en changeant

(¹) *Cf.* Volterra, [126].

enfin quand il convient ξ en $-\xi$, on a le système

$$(15)\quad \begin{cases} \varphi(y)+\int_0^y \varphi(\xi)K(\xi,y)\,d\xi+\int_0^y \varphi(-\xi)K(-\xi,y)\,d\xi=f(y), \\ \varphi(-y)-\int_0^y \varphi(\xi)K(\xi,-y)\,d\xi-\int_0^y \varphi(-\xi)K(-\xi,-y)\,d\xi=f(-y), \end{cases}$$

où l'on peut supposer y positif $(0<y<b)$.

En posant

$$(16)\quad \begin{cases} \varphi(y)=\varphi_1(y), & \varphi(-y)=\varphi_2(y), \\ f(y)=f_1(y), & f(-y)=f_2(y) \qquad (0<y<b), \end{cases}$$

puis

$$(16')\quad \begin{cases} K_{11}(\xi,y)=K(\xi,y), & K_{12}(\xi,y)=K(-\xi,y), \\ K_{21}(\xi,y)=-K(\xi,-y), & K_{22}(\xi,y)=-K(-\xi,-y) \\ & \qquad (0<\xi<y<b), \end{cases}$$

on aura le système d'équations, de seconde espèce,

$$(17)\quad \begin{cases} \varphi_1(y)+\int_0^y \varphi_1(\xi)K_{11}(\xi,y)\,d\xi+\int_0^y \varphi_2(\xi)K_{12}(\xi,y)\,d\xi=f_1(y), \\ \varphi_2(y)+\int_0^y \varphi_1(\xi)K_{21}(\xi,y)\,d\xi+\int_0^y \varphi_2(\xi)K_{22}(\xi,y)\,d\xi=f_2(y), \end{cases}$$

d'un type déjà traité (Chap. VI, n° 25).

Les fonctions considérées étant bornées et continues (ou simplement intégrables) on formera, comme au Chapitre VI, les noyaux résolvants S_{ij} $(i, j=1, 2)$ et l'on aura la solution

$$(18)\quad \begin{cases} \varphi_1(y)=f_1(y)+\int_0^y f_1(\xi)S_{11}(\xi,y)\,d\xi+\int_0^y f_2(\xi)S_{12}(\xi,y)\,d\xi, \\ \varphi_2(y)=f_2(y)+\int_0^y f_1(\xi)S_{21}(\xi,y)\,d\xi+\int_0^y f_2(\xi)S_{22}(\xi,y)\,d\xi. \end{cases}$$

En introduisant une seule fonction S, définie pour

$$-y \lessgtr \xi \lessgtr y, \qquad -b<y<+b,$$

par les formules

$$(19)\quad \begin{cases} S_{11}(\xi,y)=S(\xi,y), & S_{12}(\xi,y)=S(-\xi,y), \\ S_{21}(\xi,y)=-S(\xi,-y), & S_{22}(\xi,y)=-S(-\xi,-y), \end{cases}$$

la solution prend la forme

$$(20)\qquad \varphi(y) = f(y) + \int_{-y}^{+y} f(\xi) S(\xi, y)\, d\xi.$$

44. On traiterait de façon analogue une équation de forme

$$(21)\qquad \varphi(y) + \int_{\alpha y}^{y} \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = f(y)$$

avec $|\alpha| < 1$.

Si α est positif, elle se ramène à l'équation ordinaire de seconde espèce pour laquelle le noyau $K(\xi, y)$ est nul lorsque $\xi < \alpha y (y > 0)$.

Si α est négatif on se réduira à la précédente (14) en prenant

$$\begin{aligned} K(\xi, y) = 0 \qquad &\text{pour} \qquad -y < \xi < \alpha y \qquad (y > 0) \\ &\text{et pour} \qquad \alpha y < \xi < -y \qquad (y < 0). \end{aligned}$$

Les fonctions précédentes définies par les (16') sont alors telles que celles qui ont des indices différents (K_{12} et K_{21}) soient nulles pour $-\alpha y < \xi < y$. Il en résulte que les fonctions itérées $K_{12}^{(i)}$ et $K_{21}^{(i)}$ sont nulles dans le même champ. On a en effet, par exemple

$$K_{12}^{(i)}(\xi, y) = \sum_{1}^{2} {}_r \int_{\xi}^{y} K_{1r}^{(i-1)}(\xi, \eta) K_{r2}^{(1)}(\eta, y)\, d\eta$$

et les points de coordonnées (ξ, η), (η, y) (coordonnées écrites dans

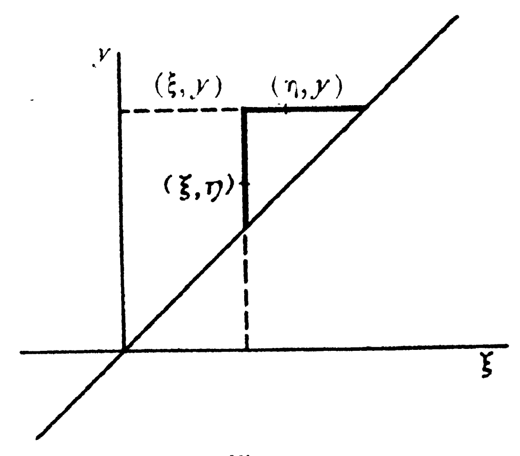


Fig. 7.

l'ordre abcisse-ordonnée) décrivent, quand η varie, les segments qu'indique la figure. Il en résulte que, dès que ξ dépasse $-\alpha y$, l'inté-

grale est nulle, l'un des facteurs sous le signe d'intégration étant nul. Comme conséquence immédiate, S_{12} et S_{21} sont nuls dans les mêmes conditions et, si l'on en déduit $S(\xi, y)$ par les (19), cette fonction est nulle dans le même champ que $K(\xi, y)$. La solution de (21) s'écrira donc

$$\varphi(y) = f(y) + \int_{\alpha y}^{y} S(\xi, y) f(\xi)\, d\xi. \tag{22}$$

45. La même méthode s'applique à une équation telle que

$$\varphi(y) + \int_{py}^{qy} \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = f(y). \qquad (|p| < 1, \ |q| < 1) \tag{23}$$

et, plus généralement à

$$\varphi(y) + \int_{z_1(y)}^{z_2(y)} \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = f(y), \tag{24}$$

où les deux fonctions $z_1(y)$ et $z_2(y)$ sont définies dans un intervalle $(-b, b)$ et sont telles que l'on ait constamment

$$|z_1(y)| < |y|, \qquad |z_2(y)| < |y|.$$

46. Équation de première espèce. — Une équation intéressante, qui intervient dans certains problèmes de la théorie des équations aux dérivées partielles, est la suivante (¹) :

$$\int_{py}^{qy} \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = f(y). \tag{25}$$

Nous supposerons que $\left|\frac{p}{q}\right| < 1$, le cas où $\frac{p}{q} > 1$ s'y ramenant immédiatement et nous noterons que, par la substitution $qy \mid y$, on ramène (25) à la forme

$$\int_{\alpha y}^{y} \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = f(y) \qquad (|\alpha| < 1). \tag{26}$$

Prenons d'abord α positif et posons la condition $K(y, y) \neq 0$.

Pour avoir une solution finie de (26), il faudra que $f(0) = 0$

(¹) Cette équation a été envisagée et résolue par M. Volterra [126]; en ce qui concerne les applications signalées dans le texte *cf.* Goursat [34].

et (26) est alors équivalente à l'équation obtenue par dérivation

$$(27)\qquad \varphi(y) - P(y)\varphi(\alpha y) + \int_{\alpha y}^{y} \varphi(\xi) F(\xi, y)\, d\xi = g(y)$$

avec

$$P(y) = \frac{\alpha K(\alpha y, y)}{K(y, y)}, \qquad F(\xi, y) = \frac{K'_y(\xi, y)}{K(y, y)}, \qquad g(y) = \frac{f'(y)}{K(y, y)}.$$

C'est une équation intégro-fonctionnelle qui est du type de la précédente (1) (§ IV) et à laquelle s'applique la méthode du nº 39 *bien que les conditions imposées aux données ne soient pas les mêmes qu'au* paragraphe IV. En particulier le second membre $g(y)$ ne satisfait plus une inégalité telle que (5), nous le supposons seulement borné et continu; d'autre part la fonction $\Pi(y)$ du nº 37 est nulle parce que

$$\lim_{n=\infty} P(\alpha^{n-1}y) = \lim_{n=\infty} \alpha \frac{K(\alpha^n y, \alpha^{n-1} y)}{K(\alpha^{n-1} y, \alpha^{n-1} y)} = \alpha < 1.$$

(27) sera résolue par la série des approximations successives

$$(28)\qquad \varphi = \varphi_0(y) + \varphi_1(y) + \ldots + \varphi_n(y) + \ldots$$

avec

$$\varphi_n(y) = \sum_{0}^{\infty}{}_j \Phi_n(\alpha^j y)\Pi_{j-1}(y)$$

en prenant

$$\Phi_0(y) = h(y)$$

et

$$\Phi_n(y) = -\int_{\alpha y}^{y} F(\xi, y)\varphi_{n-1}(\xi)\, d\xi.$$

On vérifie de suite, comme plus haut, la convergence de ces approximations et l'unicité de la solution.

Le cas où α serait négatif : $-1 < \alpha < 0$ se traitera de façon tout à fait semblable et nous n'y insisterons pas. Mais nous dirons quelques mots du cas de $\alpha = -1$.

L'équation (26) devient alors

$$(26')\qquad \int_{-y}^{+y} \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = f(y),$$

et peut être réduite au système de première espèce suivant :

$$(29)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^y \varphi_1(\xi)\,K_{11}(\xi, y)\,d\xi + \int_0^y \varphi_2(\xi)\,K_{12}(\xi, y)\,d\xi = f_1(y), \\ \displaystyle\int_0^y \varphi_1(\xi)\,K_{21}(\xi, y)\,d\xi + \int_0^y \varphi_2(\xi)\,K_{22}(\xi, y)\,d\xi = f_2(y), \end{cases}$$

en procédant comme au n° 43 et en définissant $f_1(y)$, $\varphi_1(y)$, ..., $K_{11}(\xi, y)$, ... par les formules (16) et (16'). Les systèmes de première espèce ont été étudiés plus haut, mais la solution donnée (Chap. VI, n° 26) ne s'appliquerait à (29) que si le déterminant

$$D(y, y) = \begin{vmatrix} K_{11}(y, y) & K_{12}(y, y) \\ K_{21}(y, y) & K_{22}(y, y) \end{vmatrix}$$

était différent de zéro. Or, en tenant compte des valeurs (16') des K_{ij}, on voit que l'on a $D(0, 0) = 0$. Dans l'étude du système (29) on rencontrera donc des difficultés analogues à celles que présentait l'équation de première espèce lorsque la diagonale du noyau était nulle pour $y = 0$. On pourra utiliser les méthodes qui ont servi dans ce dernier cas (ce Chapitre, n° 11) ([1]).

47. Une équation particulière à limites constantes, envisagée par Abel, mais qu'il n'a pas résolue, se ramène à (25). C'est l'équation

$$\int_a^b \varphi(x\zeta)\,K(\zeta, x)\,d\zeta = f(x).$$

([1]) L'analogie signalée ne doit pas masquer des différences notables entre les deux cas. Pour mettre le lecteur en garde contre des conclusions hâtives, il nous suffira d'indiquer qu'il peut arriver que la solution générale de (29) [donc aussi celle de (26')] dépende d'une fonction arbitraire.

M. Popovici donne l'exemple simple de l'équation

$$\int_{-y}^{+y} \varphi(\xi)\,d\xi = f(y),$$

qui n'admettra de solutions que si $f(y)$ est fonction *impaire* de y et qui donne alors

$$\varphi(y) = \frac{1}{2}\frac{df}{dy} + g(y),$$

où $g(y)$ est une fonction *impaire* quelconque. Les deux équations (29) correspondantes ne sont compatibles que si $f(y)$ est fonction impaire et se réduisent alors à une seule.

Il suffit d'y poser

$$x\zeta = \xi \qquad \text{puis} \qquad \frac{1}{x}\mathrm{K}\left(\frac{\xi}{x}, x\right) = \mathrm{H}(\xi, x)$$

pour la réduire à

$$\int_{ax}^{bx} \varphi(\xi)\mathrm{H}(\xi, x)\,d\xi = f(x)$$

qui a bien la forme (25).

Notons aussi que, par le changement de variables

$$y = e^{y_1}, \qquad \xi = e^{\xi_1},$$

l'équation (21) prend la forme

$$(21_1) \qquad \psi(y_1) + \int_{y_1-\gamma}^{y_1} \psi(\xi_1)\mathrm{H}(\xi_1, y_1)\,d\xi_1 = g(y_1),$$

où la fonction inconnue est ψ et où $\gamma = -\log\alpha$ est positif pour $0 < \alpha < 1$.

Par la même transformation, l'équation de première espèce (26) devient

$$(26_1) \qquad \int_{y_1-\gamma}^{y_1} \psi(\xi_1)\mathrm{H}(\xi_1, y_1)\,d\xi_1 = g(y_1).$$

On rencontre des équations de type (21_1) dans la théorie de l'hérédité (Volterra, [**132**]).

48. La théorie des équations aux dérivées partielles conduit aussi à des équations de Volterra de première espèce de forme

$$(30) \qquad \int_{u(y)}^{y} \varphi(\xi)\mathrm{K}(\xi, y)\,d\xi = f(x) \qquad [\mathrm{K}(y, y) \neq 0],$$

où $\mathrm{K}(\xi, y)$ est borné et continu pour ξ et y compris entre $-b$ et b et où la fonction donnée $u(y)$, bornée et continue dans l'intervalle $(-b, b)$, vérifie l'inégalité

$$|u(y)| < b.$$

L'équation (30) est une généralisation de (26) et, par dérivation, on en déduit une relation de type

$$\varphi(y) - \mathrm{P}(y)\varphi(u(y)) + \int_{u(y)}^{y} \varphi(\xi)\mathrm{K}(\xi, y)\,d\xi = g(y),$$

que l'on résoudra par rapport à l'inconnue $\varphi(y)$ comme l'équation (27) du n° 46.

Signalons enfin un Mémoire [107] où M. Tamarkin étudie l'équation

$$\varphi(y) - P(y)\varphi(u(y)) + \int_{-1}^{+y} \varphi(v(\xi))K(\xi, y)\,d\xi = f(y).$$

Le lecteur y trouvera en particulier une étude de l'unicité des solutions pour des conditions très diverses imposées aux fonctions données.

CHAPITRE VIII.

L'ÉQUATION INTÉGRALE DE FREDHOLM.

I. — L'ÉQUATION DE FREDHOLM CONSIDÉRÉE COMME CAS LIMITE D'UN SYSTÈME ALGÉBRIQUE. SA RÉSOLUTION QUAND LE DÉTERMINANT N'EST PAS NUL.

1. Nous prendrons l'équation linéaire de seconde espèce et à limites fixes (*équation de Fredholm*) sous la forme

$$(1) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x), \qquad (a \leqq x \leqq b).$$

Les fonctions données $K(x, \xi)$ (*noyau*) et $f(x)$ *second membre* seront supposées, dans tout ce Chapitre, finies et continues; nous examinerons ensuite des cas plus généraux ([1]). λ est une constante qu'il est commode d'introduire pour la discussion et qui peut prendre des valeurs réelles ou imaginaires.

La résolution de (1) s'obtient par une marche qui est de tout point parallèle à celle qui a servi pour l'équation de Volterra, en partant d'un système algébrique de n équations à n inconnues et en utilisant le principe de passage du discontinu au continu. On est ainsi conduit à la solution de Fredholm ([2]). L'opportunité d'employer une telle méthode pour le cas des limites fixes avait été remarquée par M. Volterra à peu près au moment où il traitait le cas des limites variables et il l'avait en effet appliquée ([3]).

([1]) *Cf.* Chapitre IX, § II.

([2]) Fredholm, [30].

([3]) Dans une conférence faite à Turin, concernant le phénomène des Seiches, M. Volterra eut l'occasion de faire remarquer que la résolution d'une équation à limites fixes peut s'obtenir par une méthode qui conduit à l'emploi de déterminants infinis [127].

2. Pour obtenir le système de n équations à n inconnues, donnant à la limite l'équation (1), nous diviserons l'intervalle a, b en n intervalles partiels $h_1, h_2, \ldots h_n$ et désignerons par $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs de x choisies intérieures à ces intervalles. Posons pour abréger

$$\varphi(x_i) = \varphi_i, \qquad f(x_i) = f_i, \qquad K(x_i, x_s) = K_{is};$$

le système algébrique qu'il convient d'envisager est

$$(2) \qquad \varphi_i - \lambda \sum_{1}^{n}{}_s K_{is} \varphi_s h_s = f_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

On procédera comme au Chapitre VI (§ II), en résolvant les (2) et passant à la limite lorsque le nombre des intervalles partiels $h_1, \ldots, h_n$ tend vers l'infini, chacun de ces intervalles tendant vers zéro. On pourra ainsi prévoir la forme de la solution de (1), solution qu'il faudra ensuite vérifier. La seule différence avec le cas des limites variables est que le déterminant des (2) n'est plus égal à *un* de sorte que la détermination des φ_i comporte le calcul de deux déterminants.

3. Transformons d'abord le déterminant des coefficients du système (2). Il s'écrit

$$(3) \qquad D = \begin{vmatrix} 1 - \lambda K_{11} h_1 & -\lambda K_{12} h_2 & \ldots & -\lambda K_{1n} h_n \\ -\lambda K_{21} h_1 & 1 - K_{22} h_2 & \ldots & -\lambda K_{2n} h_n \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ -\lambda K_{n1} h_1 & -\lambda K_{n2} h_2 & \ldots & 1 - \lambda K_{nn} h_n \end{vmatrix}$$

et c'est un polynome en λ de forme

$$D = D_0 + \frac{\lambda}{1!} D'_0 + \frac{\lambda^2}{2!} D''_0 + \ldots + \frac{\lambda^n}{n!} D_0^{(n)},$$

$D_0, D'_0, \ldots, D_0^{(n)}$ étant les valeurs de D et de ses dérivées pour $\lambda = 0$. On a donc d'abord

$$D_0 = 1;$$

D'_0 est la somme de n déterminants dont le premier est

$$\begin{vmatrix} -K_{11} h_1 & -K_{12} h_2 & \ldots & -K_{1n} h_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & \ldots & . \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{vmatrix} = -K_{11} h_1,$$

d'où

$$D'_0 = -\sum_{i}^{n} K_{ii} h_i;$$

de même

$$D''_0 = \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \begin{vmatrix} K_{ii} & K_{ji} \\ K_{ij} & K_{jj} \end{vmatrix} h_i h_j;$$

$$D'''_0 = -\sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} \sum_{k}^{n} \begin{vmatrix} K_{ii} & K_{ji} & K_{ki} \\ K_{ij} & K_{jj} & K_{kj} \\ K_{ik} & K_{jk} & K_{kk} \end{vmatrix} h_i h_j h_k;$$

. . . .

En désignant les déterminants précédents par

$$K\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix}, \quad K\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix}, \quad K\begin{pmatrix} i & j & k \\ i & j & k \end{pmatrix}, \quad \ldots$$

respectivement, on aura

$$D = 1 - \lambda \sum_{i}^{n} K\begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} h_i + \frac{\lambda^2}{2!} \sum_{i}^{n} \sum_{j}^{n} K\begin{pmatrix} i & j \\ i & j \end{pmatrix} h_i h_j + \ldots.$$

4. Si D n'est pas nul, l'une quelconque des inconnues, φ_i par exemple, est donnée par

$$\varphi_i = \frac{D_i}{D}, \tag{4}$$

où D_i est un second déterminant qu'il est aisé de transformer comme il a été fait pour D. Mais il nous suffira de remarquer que l'on a identiquement

$$D_i = -\sum_{s}^{n} f_s \frac{\partial D}{\partial K_{si}} \frac{1}{h_i \lambda}. \tag{5}$$

5. Reste à passer à la limite, n augmentant indéfiniment et chacun des intervalles partiels tendant vers zéro. Dans ces conditions, D tend vers

$$\Delta(\lambda) = 1 + \sum_{\nu}^{\infty} (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_\nu \\ \xi_1 & \xi_2 & \ldots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \ldots d\xi_\nu \tag{6}$$

avec

$$K\begin{pmatrix}\xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ \xi_1 & \dots & \xi_\nu\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) & \dots & K(\xi_1, \xi_n) \\ K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) & \dots & K(\xi_2, \xi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\xi_n, \xi_1) & K(\xi_n, \xi_2) & \dots & K(\xi_n, \xi_n) \end{vmatrix};$$

$\Delta(\lambda)$ *sera dit déterminant de l'équation de Fredholm* (1).

Pour prévoir la limite de D_i nous utiliserons son expression (5). Le coefficient du terme en f_i est évidemment le déterminant (3) dont on aurait supprimé la ligne et la colonne i, ce qui ne change pas sa limite Δ. Le coefficient d'un terme f_s $(s \neq i)$ contiendra en facteur, d'après l'expression (3) de D, h_s et il apparaît ainsi dans D_i une expression de forme

$$-\frac{1}{\lambda}\sum_{s \neq i} D_{si} f_s h_s$$

avec

$$D_{si} = \frac{1}{h_i h_s}\frac{\partial D}{\partial K_{si}}.$$

La somme donnera à la limite une intégrale dans laquelle la limite de D_{si} fait intervenir la dérivée fonctionnelle de Δ.

Précisons ce dernier point. Δ est une fonctionnelle de la fonction de deux variable $K(x, y)$. Pour en définir la dérivée fonctionnelle au point $x = \xi$, $y = \eta$, qui sera notée $\Delta'(\xi, \eta)$, il suffira de donner à K un accroissement δK dans un domaine σ autour du point ξ, η, de diviser l'accroissement de Δ par

$$\int\int \delta K(x, y)\,dx\,dy$$

et de faire tendre vers zéro δK et le domaine considéré. Il est clair que la limite de D_{si} fait intervenir précisément une dérivée fonctionnelle ainsi définie.

6. Les remarques qui précèdent rendent probable que, *lorsque* Δ *n'est pas nul*, l'équation (1) admet la solution

$$(7)\qquad \varphi(x) = f(x) - \frac{1}{\lambda\Delta}\int_a^b f(\xi)\,\Delta'(\xi, x)\,d\xi.$$

Il est d'ailleurs facile d'expliciter la valeur de Δ'. Portons pour

cela notre attention sur le déterminant

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} K(\xi_1, \xi_1) & K(\xi_1, \xi_2) & \dots & K(\xi_1, \xi_n) \\ K(\xi_2, \xi_1) & K(\xi_2, \xi_2) & \dots & K(\xi_2, \xi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\xi_n, \xi_1) & K(\xi_n, \xi_2) & \dots & K(\xi_n, \xi_n) \end{vmatrix}$$

qui figure dans le terme général de Δ. La variation δK effectuée sur le seul terme $K(\xi_1, \xi_2)$ donnera dans Δ' un terme où figure le déterminant déduit de Δ en y supprimant la première ligne et la deuxième colonne. Si nous posons en général

$$K\begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \dots & \eta_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} K(\xi_1, \eta_1) & K(\xi_1, \eta_2) & \dots & K(\xi_1, \eta_n) \\ K(\xi_2, \eta_1) & K(\xi_2, \eta_2) & \dots & K(\xi_2, \eta_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K(\xi_n, \eta_1) & K(\xi_n, \eta_2) & \dots & K(\xi_n, \eta_n) \end{vmatrix},$$

ce terme de Δ' s'écrira

$$-(-1)^\nu \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} \eta & \xi_3 & \dots & \xi_\nu \\ \xi & \xi_3 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_3 \dots d\xi_\nu,$$

et il est clair que chaque élément du déterminant (8) n'appartenant pas à la diagonale principale donnera dans Δ' un terme de même valeur.

On aura donc

$$(9)\qquad \Delta'(\xi, \eta) = -\lambda^2 \Delta\begin{pmatrix} \eta \\ \xi \end{pmatrix}; \lambda\Big)$$

en posant

$$(10)\qquad \Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda\Big) = K(x, y) + \sum_1^\infty{}_\nu (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \times \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ y & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_\nu,$$

et la solution (7) de l'équation de Fredholm s'écrira

$$(7')\qquad \varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{\Delta(\lambda)} \int_a^b \Delta\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}; \lambda\Big) f(\xi)\, d\xi$$

ou, encore,

$$(7'')\qquad \varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi$$

en posant

$$(11) \qquad \Gamma(x, y;\lambda) = -\frac{\Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda)}{\Delta(\lambda)};$$

$\Gamma(x, y; \lambda)$ est dit *noyau résolvant* du noyau K ou *noyau résolvant* de l'équation intégrale.

7. Vérification. — Nous ferons dépendre la vérification de la solution précédente de trois principes analogues à ceux qui ont été envisagés pour l'équation de Volterra.

Principe de convergence. — Soit M la borne supérieure de $|K(x, y)|$. Les séries (6) et (10) qui définissent $\Delta(\lambda)$ et $\Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda)$ *sont convergentes quel que soit* λ *et représentent donc des séries entières de* λ.

Pour l'établir il suffit de s'appuyer sur le théorème de M. Hadamard concernant le module d'un déterminant d'ordre p dont tous les éléments sont inférieurs en module à M : ce module est inférieur à $M^p p^{\frac{p}{2}}$ (¹).

(¹) Pour établir ce théorème [37'], nous utiliserons une représentation géométrique dans l'espace à n dimensions (coordonnées rectangulaires). Nous ferons correspondre à un déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 & \dots & a_n^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & a_2^n & \dots & a_n^n \end{vmatrix}$$

les points M_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ de coordonnées $a_1^i, a_2^i, \dots, a_n^i$. La longueur du vecteur $\overrightarrow{OM_i}$ est $\sqrt{a_1^{i2} + a_2^{i2} + \dots + a_n^{i2}}$. L'énoncé du texte sera conséquence de l'inégalité

$$(1) \qquad |D| \leqq OM_1 . OM_2 \dots OM_n.$$

Cette inégalité est évidente pour $n = 2$ ou 3; pour $n = 3$ par exemple elle revient à dire que le volume du parallélépipède est inférieur au produit des arêtes.

En général on peut se borner au cas où les vecteurs $\overrightarrow{OM_i}$ sont linéairement distincts [dans tout autre cas D est nul et (1) a lieu] Remplaçons ces vecteurs par

En considérant, par exemple, la série (10) on aura

$$\left| K\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ y & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} \right| < M^{\nu+1}(\nu+1)^{\frac{\nu+1}{2}},$$

M désignant le maximum de $|K(x, y)|$ et cette série est majorée par la série de terme général

$$v_\nu = \frac{\lambda^\nu}{\nu!}(b-a)^\nu M^{\nu+1}(\nu+1)^{\frac{\nu+1}{2}},$$

où le rapport d'un terme au précédent est

$$\lambda(b-a)M\left(\frac{\nu+2}{\nu+1}\right)^{\frac{\nu+2}{2}}\frac{1}{\sqrt{\nu+1}},$$

et tend vers zéro avec $\frac{1}{\nu}$. Il y a donc convergence; de même pour la série (6).

---

d'autres définis par

$$\overrightarrow{ON}_1 = \overrightarrow{OM}_1,$$
$$\overrightarrow{ON}_2 = \lambda_1^{(2)}\overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots,$$
$$\overrightarrow{ON}_i = \lambda_1^{(i)}\overrightarrow{OM}_1 + \dots + \lambda_{i-1}^{(i)}\overrightarrow{OM}_{i-1} + \overrightarrow{OM}_i,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,$$

où les $\lambda_k^{(i)}$ sont des scalaires. Le déterminant D devient D′ mais sa valeur n'est pas modifiée. Choisissons $\lambda_1^{(2)}$ de façon à rendre la longueur ON_2 minimum, etc.; $\lambda_1^{(i)}, \dots, \lambda_{i-1}^{(i)}$ de façon à rendre ON_i minimum. On a des équations du premier degré qui déterminent tous les $\lambda_k^{(i)}$ (déterminants non nuls parce que, dans $\overline{ON}_i^2$ les termes du second degré en $\lambda_k^{(i)}$ constituent une forme définie positive, les $\overrightarrow{OM}_k$ étant linéairement indépendants). Si l'on reprend le calcul précédent en partant des vecteurs $\overrightarrow{ON}_i$ ainsi définis, les termes du premier degré en $\lambda_k^{(i)}$ doivent disparaître dans les carrés des longueurs de ces vecteurs : il en résulte que les produits scalaires $\overrightarrow{ON}_i\overrightarrow{ON}_k$ $(i \neq k)$ sont nuls et que les longueurs des ON_i sont effectivement minimum.

Dans ces conditions, en effectuant le carré de D′ ligne par ligne il reste les seuls termes de la diagonale principale d'où

$$D^2 = D'^2 = \overline{ON}_1^2.\overline{ON}_2^2\dots\overline{ON}_n^2 \leq \overline{OM}_1^2.\overline{OM}_2^2\dots\overline{OM}_n^2.$$

Principe de réciprocité. — Il s'exprime par les deux relations

$$(12)\qquad \Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda\Big) = K(x, y)\Delta(\lambda) + \lambda\int_a^b K(x, \xi)\Delta\begin{pmatrix} \xi \\ y \end{pmatrix}; \lambda\Big)\, d\xi,$$

$$(12')\qquad \Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda\Big) = K(x, y)\Delta(\lambda) + \lambda\int_a^b \Delta\begin{pmatrix} x \\ \xi \end{pmatrix}; \lambda\Big) K(\xi, y)\, d\xi t;$$

lesquelles se déduisent de (10).

Pour justifier, par exemple, (12) partons du développement du déterminant $K\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ y & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix}$ suivant les éléments de la première ligne. Le terme général de (10) s'écrira

$$(13)\quad (-1)^\nu \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \Bigg\{ K(x, y)\int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ \xi_1 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_\nu$$
$$- \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, \xi_1) K\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_\nu \\ y & \xi_2 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_\nu$$
$$+ \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, \xi_2) K\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_\nu \\ y & \xi_1 & \xi_3 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_\nu - \dots \Bigg\};$$

or, parce que

$$K\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_\nu \\ y & \xi_2 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} = -K\begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ y & \xi_2 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix}$$
$$= +K\begin{pmatrix} \xi_2 & \xi_3 & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ y & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} = \dots,$$

on voit de suite que, à l'exception du premier, tous les termes de (13) sont égaux entre eux. En changeant les indices des variables d'intégration, cette expression (13) s'écrit

$$(-1)^\nu \frac{\lambda^\nu}{\nu!} K(x, y)\int_a^b \cdots \int_a^b K\begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ \xi_1 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_\nu$$
$$+ (-1)^{\nu-1} \frac{\lambda^\nu}{(\nu-1)!} \int_a^b \cdots \int_a^b K(x, \xi) K\begin{pmatrix} \xi & \xi_1 & \dots & \xi_{\nu-1} \\ y & \xi_1 & \dots & \xi_{\nu-1} \end{pmatrix} d\xi\, d\xi_1 \dots d\xi_{\nu-1},$$

d'où résulte (12).

Posons

$$\Gamma(x, y; \lambda) = -\frac{\Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda\Big)}{\Delta(\lambda)};$$

Γ (*noyau résolvant*) est le quotient de deux fonctions entières de λ.

c'est une fonction méromorphe de λ; lorsque la valeur choisie pour λ n'annule pas le déterminant $\Delta(\lambda)$, (12) et (12') s'écrivent

$$(14) \qquad \Gamma(x, y; \lambda) + K(x, y) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\Gamma(\xi, y; \lambda)\,d\xi = \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda)K(\xi, y)\,d\xi,$$

forme définitive du principe de réciprocité.

Principe d'inversion. — Les formules précédentes conduisent à l'inversion de la relation intégrale (1) sous réserve que λ n'annule pas le déterminant $\Delta(\lambda)$ et elles établissent l'unicité de la solution donnée par

$$(7'') \qquad \varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi)\,d\xi.$$

On s'en rendra compte en reprenant des calculs analogues à ceux du Chapitre VI [§ II]. Partons de (1) dans laquelle nous remplaçons x par η, multiplions par $\Gamma(x, \eta; \lambda)$ et intégrons par rapport à η pour l'intervalle (a, b); il vient

$$\int_a^b \Gamma(x, \eta; \lambda)\varphi(\eta)\,d\eta - \lambda \int_a^b \Gamma(x, \eta; \lambda) \int_a^b K(\eta, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi = \int_a^b \Gamma(x, \eta; \lambda) f(\eta)\,d\eta,$$

où, en échangeant l'ordre des intégrations,

$$\int_a^b \varphi(\eta)\,d\eta \left\{ \Gamma(x, \eta; \lambda) - \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) K(\xi, \eta)\,d\xi \right\} = \int_a^b \Gamma(x, \eta; \lambda) f(\eta)\,d\eta;$$

d'après (14) le premier membre s'écrit

$$-\int_a^b K(x, \eta)\varphi(\eta)\,d\eta,$$

c'est-à-dire, en tenant compte de (1), $\frac{f(x) - \varphi(x)}{\lambda}$. Il est donc clair que si (1) a une solution, cette solution est unique et donnée par (7''). La vérification que (7'') est bien solution de (1) se fait de même, grâce à (14).

8. Récapitulation des trois principes. — I. *Les deux séries* (6) *et* (10) *qui définissent* $\Delta(\lambda)$ *et* $\Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda)$ *sont convergentes quel que soit* λ *et représentent donc des fonctions entières de* λ.

II. *Lorsque* λ *n'annule pas* $\Delta(\lambda)$, *en posant*

$$\Gamma(x, y; \lambda) = -\frac{\Delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)}{\Delta(\lambda)},$$

on a

$$(14) \qquad \Gamma(x, y; \lambda) + K(x, y) = \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \Gamma(\xi, y; \lambda)\, d\xi$$
$$= \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda)\, K(\xi, y)\, d\xi.$$

III. *Dans le même cas la solution unique de* (1) *est donnée par* (7''), *égalité de forme analogue où l'on a échangé les rôles de* φ *et de* f *et où le noyau* K *est remplacé par le noyau résolvant* Γ.

9. L'équation associée de (1). — Nous désignerons par ce nom l'équation

$$(1') \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b \varphi(\xi)\, K(\xi, x)\, d\xi = f(x),$$

qui est obtenue en changeant le rôle des variables dont dépend le noyau. D'après les expressions précédentes, il est tout à fait évident que le déterminant $\Delta(\lambda)$ est le même pour (1) et pour (1'). On constate de même que, λ n'annulant pas le déterminant $\Delta(\lambda)$, la solution de (1') sera unique et déterminée par

$$(7''') \qquad \varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b f(\xi)\, \Gamma(\xi, x; \lambda)\, d\xi;$$

il suffit de reprendre, à partir des équations (14) des calculs tout à fait analogues à ceux qui ont conduit au principe d'inversion pour (1). *Le même noyau résolvant donne donc la solution des deux équations associées.*

10. *Remarque.* — Au lieu de prendre un paramètre λ multipliant

$K(x, y)$ on pourrait prendre un noyau dépendant, de façon plus compliquée, de ce paramètre et définir de même un noyau résolvant satisfaisant à des équations analogues aux (14). On démontre que, *lorsque* K *est fonction entière du paramètre* λ, *le noyau résolvant est toujours fonction méromorphe de* λ. Nous aurons l'occasion d'y revenir dans le second volume du présent ouvrage.

11. Application de la méthode des approximations successives. — Après les résultats précédents, il reste à traiter l'équation (1) [ou l'équation (1')] lorsque λ annule le déterminant $\Delta(\lambda)$. Mais avant de faire cette étude nous indiquerons ce que donne, pour les équations en question, la méthode des approximations successives déjà utilisée pour l'équation de Volterra. Bien que la solution qui en résulte soit soumise à des restrictions auxquelles échappait la méthode de Fredholm, elle mérite d'être donnée pour sa simplicité et pour diverses conséquences, qui nous serviront plus loin.

Reprenons donc l'équation

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = f(x). \tag{1}$$

Pour la traiter par approximations successives on procédera comme au Chapitre VI, n° 11, en remplaçant, sous le signe d'intégration $\varphi(x)$ par

$$f(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi,$$

tirée de (1), puis faisant la même substitution dans la nouvelle équation obtenue et ainsi de suite. Après $i-1$ telles substitutions, on obtient une équation qui aura la forme suivante :

$$\begin{aligned} \varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b f(\xi) \left\{ K^{(1)}(x, \xi) + \lambda K^{(2)}(x, \xi) + \ldots + \lambda^{i-1} K^{(i)}(x, \xi) \right\} d\xi \\ + \lambda^{i+1} \int_a^b \varphi(\xi)\, K^{(i+1)}(x, \xi)\, d\xi, \end{aligned} \tag{15}$$

en posant

$$K^{(1)}(x, \xi) = K(x, \xi),$$

et

$$K^{(n)}(x, \xi) = \int_a^b K(x, \eta)\, K^{(n-1)}(\eta, \xi)\, d\xi. \tag{16}$$

On peut dire, comme au Chapitre VI, que $K^{(n)}$ est le $n^{\text{ième}}$ *noyau itéré* de K.

Cela amène à la solution de (1) sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda \int_a^b \Gamma(x, \xi; \lambda) f(\xi)\, d\xi,$$

mais avec une nouvelle expression du noyau résolvant Γ

$$\Gamma(x, y; \lambda) = -\sum_0^\infty{}_i\, \lambda^i K^{(i+1)}(x, y), \tag{17}$$

et la solution obtenue est évidemment valable pourvu que la série (17) soit uniformément convergente.

Or les (16) entraînent, en désignant toujours par M le maximum du module de $K(x, y)$,

$$K^{(i+1)}(x, y) = M^{i+1}(b-a)^i,$$

de sorte que la méthode s'appliquera et donnera la solution de (1) si $|\lambda|$ est assez petit, certainement si

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)}. \tag{18}$$

Sous la même réserve il est aisé de voir, en reprenant le raisonnement du Chapitre VI, que la solution ainsi obtenue est unique. On l'obtiendrait aussi, et exactement sous la même forme, en cherchant une solution de (1) développée en série des puissances de λ.

Comparons cette solution à la précédente. Nous avons vu que le noyau résolvant

$$\Gamma(x, y; \lambda) = -\frac{\Delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)}{\Delta(\lambda)},$$

est une fonction méromorphe de λ ayant pour pôles les zéros du déterminant $\Delta(\lambda)$, chacun de ces zéros étant, comme nous le verrons, effectivement un pôle. La méthode des approximations successives conduit au développement en série entière de cette fonction méromorphe. On ne peut donc espérer qu'elle s'applique quel que soit λ, sauf dans le cas très particulier des noyaux pour lesquels $\Delta(\lambda)$ n'a

pas de zéro, mais son application sera limitée aux valeurs de λ pour lesquelles $|\lambda| < R$, en désignant par R le plus petit module des zéros de $\Delta(\lambda)$. La formule (18) donne une limite inférieure, assez grossière, mais immédiate, de R. On peut avoir des limites plus précises : M. Schmidt a ainsi montré [102] que l'on pourrait remplacer l'inégalité (18) par

$$\lambda^2 \int_a^b \int_a^b \{K(\xi, \eta)\}^2 \, d\xi \, d\eta < \rho < 1.$$

12. Notions sur la composition de seconde espèce. — $K(x, y)$ et $L(x, y)$ étant deux noyaux, nous dirons que le nouveau noyau

$$H(x, y) = \int_a^b K(x, \xi) L(\xi, y) \, d\xi,$$

que nous noterons

$$\overset{0}{H} = \overset{0}{K}\overset{0}{L},$$

résulte de K et de L par *composition de deuxième espèce* (ou composition à limites fixes (¹). Les propriétés formelles mises en évidence au n° 12 du Chapitre VI pour la composition de première espèce s'appliquent aussi à cette nouvelle sorte de composition :

associativité

$$(\overset{0}{F}\overset{0}{G})\overset{0}{H} = \overset{0}{F}(\overset{0}{G}\overset{0}{H});$$

distributivité

$$(\overset{0}{F} + \overset{0}{G})\overset{0}{H} = \overset{0}{F}\overset{0}{H} + \overset{0}{G}\overset{0}{H},$$

$$\overset{0}{H}(\overset{0}{F} + \overset{0}{G}) = \overset{0}{H}\overset{0}{F} + \overset{0}{H}\overset{0}{G};$$

deux fonctions pour lesquelles le produit symbolique de composition est commutatif

$$\overset{0}{F}\overset{0}{G} = \overset{0}{G}\overset{0}{F},$$

sont dites *permutables de seconde espèce*.

Ici encore l'introduction de la composition rend intuitive la formation du noyau résolvant par le développement en série (17).

On introduira d'abord les *puissances de composition* d'un

(¹) La composition de second espèce à été définie et étudiée par M. VOLTERRA, *cf.* [113], Bibl. I. Dans ses publications précédentes elle était désignée par deux étoiles surmontant les noyaux K et L. Nous adoptons ici une notation plus commode.

noyau K

$$\overset{0}{K}{}^2,\quad \overset{0}{K}{}^3,\quad \ldots,\quad \overset{0}{K}{}^n,\quad \ldots$$

qui coïncident évidemment avec les noyaux désignés plus haut par $K^{(n)}$ et définis par la précédente (16) (*noyaux itérés*). On définira, comme au Chapitre VI, le symbole d'identité $\overset{0}{K}{}^0$ ou $\overset{0}{1}{}^0$ et on remarquera enfin que toute série

$$a_1 K + a_2 \overset{0}{K}{}^2 + \ldots + a_n \overset{0}{K}{}^n + \ldots$$

définit, si elle est uniformément convergente, une fonction permutable avec K.

Ceci posé l'équation intégrale (1) s'écrit symboliquement

$$\left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{K}\right) \overset{0}{\varphi} = f,$$

et l'équation (1'), en y remplaçant la variable x par y donne

$$\varphi(y) - \lambda \int_a^b \varphi(\xi) K(\xi, y)\, d\xi = f(y),$$

c'est-à-dire symboliquement

$$\overset{0}{\varphi}\left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{K}\right) = f.$$

Dans l'un ou l'autre cas la résolution dépend de la définition du symbole

$$\left(\overset{0}{1} - \lambda \overset{0}{K}\right)^{-1}.$$

Or on voit évidemment, comme au Chapitre VI que,

$$\left(\overset{0}{1} - \lambda \overset{0}{K}\right)^{-1} = \overset{0}{1}{}^0 - \lambda \Gamma.$$

avec

$$\Gamma = -\left(K + \lambda \overset{0}{K}{}^2 + \ldots + \lambda^n \overset{0}{K}{}^{n+1} + \ldots\right);$$

on retrouve bien l'expression (17) du noyau résolvant pourvu que la série au second membre soit uniformément convergente (c'est-à-dire si $|\lambda|$ est assez petit).

II. — L'ÉQUATION DE FREDHOLM DANS LE CAS OU LE DÉTERMINANT EST NUL.

13. Comme préliminaire à l'étude des cas où le déterminant $\Delta(\lambda)$ est nul, nous devons généraliser les formules qui constituent *le principe de réciprocité* (n° 7).

Nous poserons en général, par analogie avec $\Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda\Big)$,

$$(19)\quad \Delta\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix}; \lambda\Big)$$
$$= K\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ y_1 & y_2 & \dots & y_n \end{pmatrix} + \sum_{1}^{\infty}{}_{\nu} (-1)^{\nu} \frac{\lambda^{\nu}}{\nu!}$$
$$\times \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ y_1 & \dots & y_n & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_\nu.$$

En développant, dans le terme général, le déterminant qui y figure suivant les éléments de la première ligne, ce terme donnera

$$(-1)^{\nu}\frac{\lambda^{\nu}}{\nu!}\Bigg\{ K(x_1, y_1) \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_2 & \dots & x_n & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ y_2 & \dots & y_n & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_\nu$$
$$- K(x_1, y_2) \int_a^b \dots \int_a^b K\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & \dots & x_n & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \\ y_1 & y_3 & \dots & y_n & \xi_1 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_\nu + \dots$$
$$+ (-1)^n \int_a^b \dots \int_a^b K(x_1, \xi_1) K\begin{pmatrix} x_2 & \dots & x_n & \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_\nu \\ y_1 & \dots & y_{n-1} & y_n & \xi_2 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_\nu$$
$$+ (-1)^{n+1} \int_a^b \dots \int_a^b K(x_1, \xi_2)$$
$$\times K\begin{pmatrix} x_2 & \dots & x_n & \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \dots & \xi_\nu \\ y_1 & \dots & y_{n-1} & y_n & \xi_1 & \xi_3 & \dots & \xi_\nu \end{pmatrix} d\xi_1 \dots d\xi_\nu + \dots \Bigg\}.$$

Comme plus haut (n° 7) nous remarquerons que les termes après le $n^{\text{ième}}$ sont égaux et donnent

$$\nu(-1)^n \int_a^b \dots \int_a^b K(x_1, \xi)$$
$$\times K\begin{pmatrix} x_2 & \dots & x_n & \xi & \xi_1 & \dots & \xi_{\nu-1} \\ y_1 & \dots & y_{n-1} & y_n & \xi_1 & \dots & \xi_{\nu-1} \end{pmatrix} d\xi\, d\xi_1 \dots d\xi_{\nu-1}.$$

ou

$$-\nu\int_a^b\cdots\int_a^b K(x_1,\xi)\,K\begin{pmatrix}\xi & x_2 & \ldots & x_n & \xi_1 & \ldots & \xi_{\nu-1}\\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n & \xi_1 & \ldots & \xi_{\nu-1}\end{pmatrix}d\xi\,d\xi_1\ldots d\xi_{\nu-1},$$

de sorte que l'on a la formule que nous avions en vue

$$(20)\quad \Delta\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg) = K(x_1,y_1)\,\Delta\begin{pmatrix}x_2 & \ldots & x_n\\ y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg)$$

$$-K(x_1,y_2)\,\Delta\begin{pmatrix}x_2 & x_3 & \ldots & x_n\\ y_1 & y_3 & \ldots & y_n\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg)+\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}K(x_1,y_n)\,\Delta\begin{pmatrix}x_2 & \ldots & x_n\\ y_1 & \ldots & y_{n-1}\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg)$$

$$+\lambda\int_a^b K(x_1,\xi)\,\Delta\begin{pmatrix}\xi & x_2 & \ldots & x_n\\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg)\,d\xi$$

et, de même, la formule analogue

$$(20')\quad \Delta\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg) = K(x_1,y_1)\,\Delta\begin{pmatrix}x_2 & \ldots & x_n\\ y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg)$$

$$-K(x_2,y_1)\,\Delta\begin{pmatrix}x_1 & x_3 & \ldots & x_n\\ y_2 & y_3 & \ldots & y_n\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg)+\ldots$$

$$+(-1)^{n-1}K(x_n,y_1)\,\Delta\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_{n-1}\\ y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg)$$

$$+\lambda\int_a^b \Delta\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \ldots & x_n\\ \xi & y_2 & \ldots & y_n\end{pmatrix};\ \lambda\Bigg)\,K(\xi,y_1)\,d\xi$$

qui généralisent les précédentes (12) et (12′).

14. Équations de Fredholm homogènes. — Prenons d'abord les équations (1) et (1′) avec le second membre nul (*équations homogènes*). Elles s'écrivent

$$(21)\qquad \varphi(x) = \lambda\int_a^b K(x,\xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi,$$

$$(21')\qquad \varphi(x) = \lambda\int_a^b \varphi(\xi)\,K(\xi,x)\,d\xi.$$

Nous avons déjà vu que, lorsque λ n'est pas racine du déterminant $\Delta(\lambda)$, la solution de (1) ou de (1′) est unique, de sorte que (21) ou (21′) n'ont pas d'autre solution que zéro. Il en va différemment lorsque λ annule le déterminant $\Delta(\lambda)$.

L'expression de $\Delta(\lambda)$ donne immédiatement, pour les dérivées

successives par rapport à λ,

$$\Delta'(\lambda) = -\int_a^b \Delta\begin{pmatrix} x \\ x \end{pmatrix}; \lambda\Big) dx,$$

. . . . ,

$$\Delta^{(p)}(\lambda) = (-1)^p \int_a^b \cdots \int_a^b \Delta\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p \\ x_1 & \dots & x_p \end{pmatrix}; \lambda\Big) dx_1 \dots dx_p.$$

Si donc on suppose que $\lambda = \lambda'$ est racine de $\Delta(\lambda)$ avec la multiplicité m, on peut affirmer que $\Delta\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ y_1 & \dots & y_m \end{pmatrix}; \lambda'\Big)$ n'est pas identiquement nul. Il existe donc sûrement un entier n $(0 < n \leq m)$ tel que $\Delta\begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_p \\ y_1 & \dots & y_p \end{pmatrix}; \lambda'\Big)$ soit identiquement nul pour $p < n$ et non identiquement nul pour $p = n$. Prenons alors pour $x_1 x_2 \dots x_n$, $y_1 y_2 \dots y_n$ un ensemble de valeurs $\xi_1 \xi_2 \dots \xi_n$, $\eta_1 \eta_2 \dots \eta_n$ telles que $\Delta\begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'\Big)$ ait une valeur Δ_0 différente de zéro. Dans ces conditions la formule (20) se réduit à

$$(22)\quad \Delta\begin{pmatrix} x & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'\Big) = \lambda' \int_a^b K(x, \xi)\, \Delta\begin{pmatrix} \xi & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'\Big) d\xi,$$

et nous fait connaître une solution de l'équation homogène (21), à savoir

$$\Phi_1(x) = \Delta\begin{pmatrix} x & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'\Big).$$

Il en sera évidemment de même des fonctions

$$\Phi_2(x) = \Delta\begin{pmatrix} \xi_1 & x & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \dots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'\Big), \qquad \dots,$$

$$\Phi_n(x) = \Delta\begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & x \\ \eta_1 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'\Big)$$

et, en général, de toute combinaison linéaire à coefficients constants

$$A_1\Phi_1(x) + \dots + A_n\Phi_n(x).$$

15. **Vérifions que les solutions Φ_1, Φ_2, ..., Φ_n ainsi obtenues sont linéairement indépendantes.**

Dans le cas contraire soient A_s des constantes telles que

$A_1\Phi_1 + \ldots + A_n\Phi_n$ soit identiquement nul; en donnant à x la valeur ξ_s, on voit que A_s doit être nul.

On peut aussi rattacher ce résultat au calcul de

$$I = \int_a^b \sum_1^n {}_r \bar{A}_r K(\xi_r, \xi) \sum_1^n {}_s A_s \Phi_s(\xi)\, d\xi$$

($\bar{A}_r$ étant l'imaginaire conjuguée de A_r). D'après la relation (22) on a

$$\int_a^b K(\xi_r, \xi)\Phi_1(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\lambda'}\Delta\begin{pmatrix} \xi_r & \xi_2 & \ldots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \ldots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda' \Big) = 0 \qquad \text{si } r \neq 1,$$

$$= \frac{1}{\lambda'}\Delta\begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \eta_1 & \ldots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda' \Big) = \frac{\Delta_0}{\lambda'} \qquad \text{si } r = 1,$$

de même

$$\int_a^b K(\xi_n, \xi)\Phi_s(\xi)\, d\xi$$

est nul, sauf si $r = s$ et est alors égal à $\frac{\Delta_0}{\lambda'}$. L'intégrale I se réduit alors à

$$\frac{\Delta_0}{\lambda'} \sum_1^n {}_r \bar{A}_r A_r,$$

et ne peut s'annuler qu'avec tous les coefficients A_r.

Nous démontrerons enfin que toute solution de (21) est combinaison linéaire de

$$\Phi_1(x), \quad \Phi_2(x), \quad \ldots, \quad \Phi_n(x).$$

En effet (21) peut s'écrire

$$(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda'\overset{0}{K})\overset{0}{\varphi} = 0$$

et entraîne, H étant un noyau quelconque,

$$(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda'\overset{0}{H})(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda'\overset{0}{K})\overset{0}{\varphi} = 0$$

ou, encore,

$$\varphi = \lambda'\overset{0}{F}\overset{0}{\varphi}$$

avec

(23) $$F = H + K - \lambda'\overset{0}{H}\overset{0}{K}.$$

Particularisons le noyau H, qui restait jusqu'ici arbitraire, en posant

$$H = -\frac{\Delta\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ y & \eta_1 & \ldots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda' \Big)}{\Delta\begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \eta_1 & \ldots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda' \Big)};$$

l'équation (20'), écrite pour $\Delta\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \dots & \xi_n \\ y & \eta_1 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'$ entraîne

$$(24) \quad \Delta_0 F = K(\xi_1, y)\Phi_1(x) + K(\xi_2, y)\Phi_2(x) + \dots + K(\xi_n, y)\Phi_n(x),$$

$\overset{0}{F}\overset{0}{\varphi}$ est donc égale à

$$\frac{1}{\Delta_0}\sum_1^n{}_r \Phi_r(x)\int_a^b K(\xi_r, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

c'est-à-dire linéaire par rapport aux $\Phi_r(x)$; il en est de même de $\varphi(x)$ puisque

$$\varphi(x) = \lambda'\overset{0}{F}\overset{0}{\varphi}.$$

16. L'équation homogène (21) est ainsi complètement traitée; l'équation associée (21') s'étudie de même et l'on peut résumer les résultats concernant les équations homogènes dans l'énoncé suivant :

Si λ n'est pas racine de $\Delta(\lambda)$, les équations homogènes (21) et (21') n'ont pas d'autre solution que zéro.

Si $\lambda = \lambda'$ est racine du déterminant et si l'on prend pour n le plus petit entier tel que $\Delta\begin{pmatrix} \xi_1 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'$ ne soit pas identiquement nul, si l'on fixe les valeurs des ξ et des η de manière à donner à cette expression une valeur non nulle, la solution générale de (21) sera

$$\varphi(x) = \sum_1^n{}_r A_r\Phi_r(x),$$

où les A_r sont des constantes arbitraires et où

$$\Phi_1(x) = \Delta\begin{pmatrix} x & \xi_2 & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'\Big),$$

$$\Phi_2(x) = \Delta\begin{pmatrix} \xi_1 & x & \dots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \dots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'\Big),$$

. . . .

La solution générale de (21') sera de même

$$\varphi(x) = \sum_1^n{}_r A_r\Psi_r(x)$$

avec

$$\Psi_1(x) = \Delta\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n ; & \lambda' \\ x & \eta_2 & \dots & \eta_n & \end{pmatrix},$$

$$\Psi_2(x) = \Delta\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \dots & \xi_n ; & \lambda' \\ \eta_1 & x & \dots & \eta_n & \end{pmatrix},$$

. . . .

les fonctions Φ_i *et les* Ψ_i *sont respectivement linéairement indépendantes.*

17. L'équation avec second membre. — λ gardant la valeur précédente λ', revenons à l'équation avec second membre

$$(1) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi = f(x).$$

Il est clair que, si elle a une solution, elle en aura une infinité obtenues en ajoutant à l'une d'elles la solution générale

$$A_1\Phi_1(x) + \dots + A_n\Phi_n(x)$$

de l'équation homogène correspondante.

En multipliant l'équation (1) par Ψ_i, solution de l'équation homogène associée, puis en intégrant, il vient

$$\int_a^b \varphi(\xi)\Psi_i(\xi)\,d\xi = \lambda' \int_a^b \varphi(\xi)\,d\xi \int_a^b \Psi_i(\eta)K(\eta, \xi)\,d\eta + \int_a^b f(\eta)\Psi_i(\eta)\,d\eta$$

qui se réduit à

$$\int_a^b f(\xi)\Psi_i(\xi)\,d\xi = 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, n);$$

nous avons ainsi des conditions nécessaires pour que (1) ait des solutions pour la valeur λ' et nous allons voir que ces conditions sont nécessaires et suffisantes.

Il suffit pour cela de reprendre le calcul du n° 15. En gardant les mêmes notations, (1) entraîne

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda' \int_a^b H(x, \xi)f(\xi)\,d\xi + \lambda' \int_a^b F(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi,$$

et, d'après l'expression (24) de F, le dernier terme est une combinaison linéaire des $\Phi_i(x)$, qui peut être négligée. Si l'équation (1) a des

solutions l'une d'elles est

$$\varphi(x) = f(x) - \lambda' \int_a^b \mathrm{H}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi = (\overset{0}{1}{}^0 - \lambda' \overset{0}{\mathrm{H}}) \overset{0}{f},$$

et il reste à vérifier que cette expression satisfait bien (1). Or en substituant on trouve la condition

$$\int_a^b \mathrm{G}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi = 0$$

avec

$$\mathrm{G} = \mathrm{K} + \mathrm{H} - \lambda' \overset{0}{\mathrm{K}} \overset{0}{\mathrm{H}}.$$

Ce noyau G est tout à fait analogue au précédent F et, d'après (20), admet une expression semblable à (24), mais dans laquelle figurent linéairement les

$$\Psi_1(y), \quad \Psi_2(y), \quad \ldots, \quad \Psi_n(y).$$

L'expression

$$\int_a^b \mathrm{G}(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$$

est donc une combinaison linéaire des intégrales

$$\int_a^b f(\xi) \Psi_j(\xi)\, d\xi$$

et ne sera nulle que sous les conditions posées.

En résumé : *l'équation*

$$(1) \qquad \varphi(x) - \lambda' \int_a^b \mathrm{K}(x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi = f(x) \qquad [\Delta(\lambda') = 0]$$

n'admet de solutions que sous les conditions, nécessaires et suffisantes,

$$(25) \qquad \int_a^b f(\xi) \Psi_i(\xi)\, d\xi = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Quand ces conditions sont remplies, une solution est

$$(26) \qquad \varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda'}{\Delta\begin{pmatrix} \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \eta_1 & \ldots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda'} \times$$

$$\times \int_a^b \Delta\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \xi & \eta_1 & \ldots & \eta_n \end{pmatrix}; \lambda' f(\xi)\, d\xi,$$

et toutes les autres s'en déduisent en y ajoutant une combinaison linéaire des Φ_i.

On aura un énoncé analogue pour l'équation (1′); *les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des solutions seront*

$$\int_a^b f(\xi)\Phi_i(\xi)\,d\xi = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

et, si ces conditions sont remplies, l'une des solutions sera

$$(26') \quad \varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda'}{\Delta\begin{pmatrix}\xi_1 & \ldots & \xi_n \\ \eta_1 & \ldots & \eta_n\end{pmatrix};\lambda'} \int_a^b f(\xi)\,\Delta\begin{pmatrix}\xi & \xi_1 & \ldots & \xi_n \\ x & \eta_1 & \ldots & \eta_n\end{pmatrix};\lambda'\,d\xi,$$

toutes les autres en étant déduites par addition d'une combinaison linéaire des Ψ_i (1).

18. Les valeurs de λ qui annulent $\Delta(\lambda)$ sont dites valeurs *fondamentales* (ou *singulières*, ou *caractéristiques*) de l'équation ou du noyau. Les fonctions Φ_i ou Ψ_s correspondantes sont dites fonctions *fondamentales;* le choix des n solutions fondamentales Φ_i (ou Ψ_s) comporte d'ailleurs un certain arbitraire : on peut remplacer les Φ_i (ou les Ψ_s) par n de leurs combinaisons linéaires, indépendantes et à coefficients constants.

$f(x)$ et $g(x)$ étant deux fonctions, on dit qu'elles sont orthogonales (*cf.* p. 288-299) *si*

$$(27) \qquad \int_a^b f(\xi)\,g(\xi)\,d\xi = 0,$$

(27) peut d'ailleurs s'écrire $\overset{0}{f}\overset{0}{g} = 0$ si l'on note les fonctions $f(y)$ et $g(x)$, ou $\overset{0}{g}\overset{0}{f} = 0$ si on les note $f(x)$ et $g(y)$. L'orthogonalité exprime donc qu'un produit de composition formé avec f et g est nul.

D'après ce qui précède, pour que l'équation de Fredholm, où λ prend une valeur caractéristique, admette des solutions, il est nécessaire et suffisant que son second membre soit orthogonal à toutes les fonctions fondamentales de l'équation associée.

---

(1) Il est à peine besoin d'insister sur l'analogie des résultats obtenus dans ce paragraphe et dans le précédent avec ceux qui concernent les systèmes d'équations algébriques du premier degré. Les fonctions $\Delta\begin{pmatrix}x_1 & \ldots & x_n \\ y_1 & \ldots & y_n\end{pmatrix};\lambda$ jouent le rôle de *mineurs* du déterminant $\Delta(\lambda)$.

III. PROPRIÉTÉS DU DÉTERMINANT ET DU NOYAU RÉSOLVANT.

19. Nous réunissons ici les propriétés les plus immédiates, et qui d'ailleurs seront utilisées par la suite.

Vérifions d'abord un énoncé donné plus haut (n° **11**). Le noyau résolvant

$$\Gamma(x, y; \lambda) = -\frac{\Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda\Big)}{\Delta(\lambda)}$$

est, comme nous l'avons établi, une fonction méromorphe de λ. Il est aisé de montrer que *chaque zéro de* $\Delta(\lambda)$ *donne effectivement un pôle de* $\Gamma(x, y; \lambda)$.

Reprenons en effet la formule (n° **14**)

$$\Delta'(\lambda) = -\int_a^b \Delta\left(\begin{matrix} x \\ x \end{matrix}; \lambda\right) dx \tag{28}$$

qui donne la dérivée du déterminant de Fredholm par rapport à λ. Soit $\lambda = c$ un zéro d'ordre m de $\Delta(\lambda)$, si $\Delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)$ était divisible par $(\lambda - c)^m$ il en serait de même, d'après (28), de $\Delta'(\lambda)$, ce qui est absurde.

20. Série de puissances donnant $\log \Delta(\lambda)$. — La formule (28) s'écrit, en y faisant intervenir Γ.

$$\frac{\Delta'(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = \int_a^b \Gamma(x, x; \lambda)\, dx;$$

elle donnera un développement en série du premier membre en y remplaçant Γ par la série de composition

$$\Gamma = -\left(K + \lambda \overset{0}{K}{}^2 + \ldots + \lambda^{n-1} \overset{0}{K}{}^n + \ldots\right).$$

Nous nommerons *trace* d'un noyau quelconque $K(x, y)$ l'expression

$$\int_a^b K(x, x)\, dx;$$

en notant k_n la trace du noyau itéré $\overset{0}{K}{}^n(x, y)$ nous aurons donc

$$\frac{\Delta'(\lambda)}{\Delta(\lambda)} = -(k_1 + \lambda k_2 + \ldots + \lambda^{n-1} k_n + \ldots), \tag{29}$$

d'où, en intégrant et tenant compte de ce que $\Delta(0) = 1$, le développement en série

$$\log \Delta(\lambda) = -\left\{ k_1 \lambda + k_2 \frac{\lambda^2}{2} + \ldots + k_n \frac{\lambda^n}{n} + \ldots \right\} \tag{30}$$

valable quand $|\lambda|$ n'atteint pas le plus petit des modules des zéros de $\Delta(\lambda)$ (*cf.* nº 11).

21. *Genre de* $\Delta(\lambda)$. — Rappelons que si une fonction entière $F(\lambda)$ admet les zéros $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n, \ldots$ et s'il existe un entier k, choisi le plus petit possible, tel que la série

$$\sum_n \frac{1}{|\lambda_n|^{k+1}}$$

soit convergente, $F(\lambda)$ admet un développement en produit infini de Weierstrass

$$F(\lambda) = e^{P(\lambda)} \prod_{i=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda}{\lambda_i}\right) e^{\frac{\lambda}{\lambda_i} + \frac{\lambda^2}{2\lambda_i^2} + \ldots + \frac{\lambda^k}{k\lambda_i^k}},$$

$P(\lambda)$ étant une autre fonction entière. Dans le cas où $P(\lambda)$ se réduit à un polynome de degré n il est intéressant d'envisager le plus grand des deux nombres n et k qui, d'après la définition de Laguerre, donne le *genre* de la fonction entière.

M. Hadamard a démontré que, le développement de $F(\lambda)$ étant

$$F(\lambda) = \sum_{0}^{\infty} {}_n\, a_n \lambda^n,$$

si

$$\lim_{n=\infty} n^{\alpha} \sqrt[n]{|a_n|} = 0,$$

$F(\lambda)$ est au plus de genre $\frac{1}{\alpha}$.

Appliquons ce résultat à $\Delta(\lambda)$. D'après le nº 7 (principe de convergence) on a

$$|a_n| < \frac{M^n (b-a)^n n^{\frac{n}{2}}}{n!}$$

et il en résulte que

$$n^{\alpha}\sqrt[n]{|a_n|}$$

tend vers zéro si

$$\alpha < \frac{1}{2}.$$

Donc $\Delta(\lambda)$ *est de genre inférieur ou égal* à 2. On peut d'ailleurs montrer (Schur [**104**]) que pour tout noyau borné la série

$$\sum \frac{1}{|\lambda_i|^2}$$

est convergente. On aura donc pour $\Delta(\lambda)$ le produit infini

$$(31) \qquad \Delta(\lambda) = e^{a\lambda+b\lambda^2}\prod_{1}^{\infty}\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_i}\right)e^{\frac{\lambda}{\lambda_i}},$$

a et b étant des constantes qui peuvent être nulles. On démontre d'ailleurs (¹) que b est forcément nulle dans le cas d'un noyau continu.

Il est aisé d'avoir des résultats analogues pour $\Delta\left(\begin{matrix}x\\ y\end{matrix}; \lambda\right)$ et pour les autres *mineurs* de $\Delta(\lambda)$.

22. Comme application nous pouvons enfin caractériser les noyaux qui n'ont aucune valeur singulière. Il faut alors que

$$\Delta(\lambda) = e^{a\lambda+b\lambda^2} \qquad \text{ou} \qquad \Delta(\lambda) = e^{a\lambda}$$

et, d'après (30), il est donc nécessaire et suffisant que toutes les traces soient nulles à partir de la troisième (la seconde étant forcément nulle dans le cas du noyau continu).

On pourra caractériser de façon analogue le cas d'un noyau qui n'a qu'un nombre fini de valeurs singulières. $\frac{\Delta'(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ est alors une fonction rationnelle dont la partie principale à l'infini se réduit à $a + 2b\lambda$. On en déduit aisément qu'il doit exister entre les traces, à partir de la troisième, une même relation de récurrence linéaire et à coefficients constants (²).

(¹) *Cf.* Carleman, [13].
(²) *Cf.* Lalesco, [55], page 32.

23. Relations diverses caractérisant des noyaux résolvants. — Reprenons le noyau

$$\Gamma(x, y; \lambda)$$

pour lequel nous avons déjà vu les deux relations fondamentales

$$(14)\qquad \Gamma + K = \lambda \overset{0}{K}\overset{0}{\Gamma},$$
$$= \lambda \overset{0}{\Gamma}\overset{0}{K} \qquad \text{(principe de réciprocité)}$$

qui expriment que

$$\left(\overset{0}{1^0} - \lambda \overset{0}{\Gamma}\right) = \left(\overset{0}{1^0} - \lambda \overset{0}{K}\right)^{-1}.$$

L'une d'elles suffit à caractériser Γ, quand K est connu. Nous allons en tirer d'autres relations, également caractéristiques des noyaux résolvants.

En donnant au paramètre λ une seconde valeur λ_1 et en mettant en évidence, dans Γ, le paramètre dont il dépend, on peut écrire

$$(32)\qquad \overset{0}{1^0} - \lambda \overset{0}{\Gamma}(\lambda) = \frac{\overset{0}{1^0}}{\overset{0}{1^0} - \lambda \overset{0}{K}}, \qquad \overset{0}{1^0} - \lambda_1 \overset{0}{\Gamma}(\lambda_1) = \frac{\overset{0}{1^0}}{\overset{0}{1^0} - \lambda_1 \overset{0}{K}},$$

d'où, après composition par $\Gamma(\lambda_1)$ et $\Gamma(\lambda)$ respectivement et en remarquant que $\Gamma(\lambda)$ et $\Gamma(\lambda_1)$, d'après leurs expressions en séries, sont évidemment permutables,

$$\Gamma(\lambda_1) - \Gamma(\lambda) + (\lambda_1 - \lambda)\overset{0}{\Gamma}(\lambda)\overset{0}{\Gamma}(\lambda_1) = \frac{\overset{0}{\Gamma}(\lambda_1)}{\overset{0}{1^0} - \lambda \overset{0}{K}} - \frac{\overset{0}{\Gamma}(\lambda)}{\overset{0}{1^0} - \lambda_1 \overset{0}{K}};$$

or le second membre est identiquement nul parce que, d'après (14), chacun des termes de la différence donne la même valeur

$$-\frac{\overset{0}{K}}{\left(1 - \lambda \overset{0}{K}\right)\left(1 - \lambda_1 \overset{0}{K}\right)}.$$

On a donc la relation, vérifiée par tous les noyaux résolvants,

$$(33)\qquad \Gamma(\lambda_1) - \Gamma(\lambda) + (\lambda_1 - \lambda)\overset{0}{\Gamma}(\lambda)\overset{0}{\Gamma}(\lambda_1) = 0.$$

Toute fonction qui satisfait (33) *est d'ailleurs noyau résolvant du noyau* $K(x, y) = -\Gamma(x, y; 0)$ puisque, pour $\lambda_1 = 0$, la relation (33) se réduit à (14).

L'équation (33) entraîne d'ailleurs la relation

(34) $$\frac{d\Gamma}{d\lambda} = -\overset{0}{\Gamma}{}^2(\lambda),$$

également caractéristique parce qu'on en tire

(35) $$\frac{d^n\Gamma}{d\lambda^n} = (-1)^n n! \overset{0}{\Gamma}{}^{n+1}(\lambda),$$

d'où l'on retombe aisément sur le développement en série de Γ.

IV. — DÉCOMPOSITION D'UN NOYAU EN NOYAUX PRINCIPAUX RELATIFS AUX DIVERS PÔLES [1].

24. Noyau principal. — Soit $\Gamma(x, y; \lambda)$ le noyau résolvant correspondant à $K(x, y)$. Considérons une valeur singulière $\lambda = c$, pôle d'ordre m de $\Gamma(x, y; \lambda)$. En mettant en évidence la partie principale de Γ relative au pôle c, on pourra écrire

(36) $$\Gamma(x, y; \lambda) = \gamma(x, y; \lambda) + \Gamma_1(x, y; \lambda),$$

Γ_1 restant fini pour $\lambda = c$ et $\gamma(x, y; \lambda)$ étant de forme

$$\gamma(x, y; \lambda) = \frac{g_m(x, y)}{(\lambda - c)^m} + \frac{g_{m-1}(x, y)}{(\lambda - c)^{m-1}} + \ldots + \frac{g_1(x, y)}{\lambda - c}.$$

Nous allons voir que γ et Γ_1 *sont respectivement des noyaux résolvants de*

$$-\gamma(x, y; 0) = k(x, y), \qquad -\Gamma_1(x, y; 0) = K_1(x, y),$$

de sorte que l'on a

$$K(x, y) = k(x, y) + K_1(x, y).$$

Cette propriété essentielle justifie la dénomination de *noyau principal* relatif au pôle $\lambda = c$ donnée au noyau $k(x, y)$ dont la résolvante donne la partie *principale* γ de Γ concernant le pôle en question.

Pour établir que γ et Γ_1 sont respectivement des noyaux résol-

---

[1] Ces résultats et ceux du paragraphe suivant sont dus à MM. Goursat, [36], Heywood, [40]. Nous suivrons de très près l'exposé de M. Goursat, [37].

vants nous partirons de l'équation caractéristique (33) du n° **23**. Elle s'écrit

$$(37)\quad \frac{\gamma(\lambda_1)-\gamma(\lambda)}{\lambda_1-\lambda}+\frac{\Gamma_1(\lambda_1)-\Gamma_1(\lambda)}{\lambda_1-\lambda}$$
$$=-\overset{0}{\gamma}(\lambda)\overset{0}{\gamma}(\lambda_1)-\overset{0}{\gamma}(\lambda)\overset{0}{\Gamma}_1(\lambda_1)-\overset{0}{\Gamma}_1(\lambda)\overset{0}{\gamma}(\lambda_1)-\overset{0}{\Gamma}_1(\lambda)\overset{0}{\Gamma}_1(\lambda_1).$$

En égalant les parties singulières des deux membres pour $\lambda=c$ (λ_1 étant considéré comme fixe), il vient

$$(38)\quad \frac{\gamma(\lambda_1)-\gamma(\lambda)}{\lambda_1-\lambda}=-\overset{0}{\gamma}(\lambda)\overset{0}{\gamma}(\lambda_1)-\overset{0}{\gamma}(\lambda)\overset{0}{\Gamma}_1(\lambda_1)$$

et, en changeant le rôle de λ et λ_1, on a de même

$$\frac{\gamma(\lambda_1)-\gamma(\lambda)}{\lambda_1-\lambda}=-\overset{0}{\gamma}(\lambda)\overset{0}{\gamma}(\lambda_1)-\overset{0}{\Gamma}_1(\lambda)\overset{0}{\gamma}(\lambda_1).$$

Il en résulte que

$$\overset{0}{\gamma}(\lambda)\overset{0}{\Gamma}_1(\lambda_1)=\overset{0}{\Gamma}_1(\lambda)\overset{0}{\gamma}(\lambda_1)$$

et la valeur commune est forcément zéro, puisque, d'après le second membre, cette valeur commune donnerait uniquement des termes en $\frac{1}{(\lambda_1-c)^i}$, tandis que, d'après le premier, elle est régulière en λ_1.

L'équation (38) se réduit alors à

$$\frac{\gamma(\lambda_1)-\gamma(\lambda)}{\lambda_1-\lambda}=-\overset{0}{\gamma}(\lambda)\overset{0}{\gamma}(\lambda_1)$$

et (37) donne la relation analogue pour Γ_1. Les fonctions γ et Γ_1 sont donc bien des noyaux résolvants et les résultats annoncés sont justifiés.

25. Orthogonalité de deux noyaux. — La démonstration précédente conduit à détacher la notion intéressante de noyaux orthogonaux (*cf.* p. 243, la notion de fonctions orthogonales).

Deux noyaux $k_1(x,y)$ et $k_2(x,y)$, dont le produit de composition est identiquement nul, quel que soit l'ordre dans lequel on l'effectue, seront dits orthogonaux : ils vérifient donc

$$(39)\quad \overset{0}{k}_1\overset{0}{k}_2=0,$$

$$(39')\quad \overset{0}{k}_2\overset{0}{k}_1=0.$$

Si l'une seulement des formules (39) et (39') est satisfaite, on dira que les noyaux sont *semi-orthogonaux*.

Il est facile de donner des exemples des deux cas. On prendra

$$k_1(x, y) = X_1(x)Y_1(y), \qquad k_2(x, y) = X_2(x)Y_2(y),$$

en choisissant les fonctions X et Y de façon que

$$\int_a^b Y_1(\xi)X_2(\xi)\,d\xi = 0, \qquad \int_a^b Y_2(\xi)X_1(\xi)\,d\xi = 0,$$

(orthogonalité), ou seulement l'une de ces conditions (semi-orthogonalité).

Les résultats du début de ce paragraphe peuvent alors s'énoncer en disant que les deux noyaux $k(x, y)$ et $K_1(x, y)$ sont orthogonaux, qu'il en est de même de leurs résolvantes : quels que soient λ et λ_1

$$\overset{0}{\gamma}(\lambda)\overset{0}{\Gamma}_1(\lambda_1) = \overset{0}{\Gamma}_1(\lambda_1)\overset{0}{\gamma}(\lambda) = 0,$$

et que le noyau résolvant de la somme $k + K_1$ est la somme des noyaux résolvants partiels γ et Γ_1.

Il est clair que toutes ces propriétés s'appliquent à des noyaux orthogonaux quelconques : si k_1 et k_2 sont orthogonaux, il en sera de même de leurs puissances de composition et de toutes combinaisons linéaires (ou séries)

$$a_0 k_1 + a_1 \overset{0}{k}{}_1^2 + \ldots, \qquad b_0 k_2 + b_1 \overset{0}{k}{}_2^2 + \ldots$$

de ces puissances de composition; en particulier les noyaux résolvants (envisagés pour des valeurs quelconques et indépendantes des paramètres λ qui y figurent) seront orthogonaux; enfin le noyau résolvant de la somme étant pris sous forme de série

$$-\left\{ k_1 + k_2 + \lambda\left(\overset{0}{k}_1 + \overset{0}{k}_2\right)^2 + \lambda^2\left(\overset{0}{k}_1 + \overset{0}{k}_2\right)^3 + \ldots \right\}$$

sera bien égal à

$$-\left\{ k_1 + \lambda \overset{0}{k}{}_1^2 + \ldots \right\} - \left\{ k_2 + \lambda \overset{0}{k}{}_2^2 + \ldots \right\},$$

c'est-à-dire à la somme des noyaux résolvants $\gamma_1(x, y; \lambda)$ et $\gamma_2(x, y; \lambda)$ qui correspondent respectivement à k_1 et à k_2.

26. Équations intégrales dont le noyau est somme de deux noyaux orthogonaux. — Prenons l'équation intégrale du type (1), que nous écrirons

(40) $$\left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{K}\right)\overset{0}{\varphi} = f$$

et admettons que K soit la somme de deux noyaux orthogonaux k_1 et k_2. On aura évidemment

$$\left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{K}\right) = \left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{k_1}\right)\left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{k_2}\right) = \left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{k_2}\right)\left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{k_1}\right),$$

de sorte que l'étude de l'équation proposée se ramène à celle de deux équations successives ayant pour noyaux k_1 et k_2 (pris d'ailleurs dans un ordre quelconque).

Admettons que la valeur de λ ne soit pas valeur singulière commune des deux noyaux $\overset{0}{k_1}$ et $\overset{0}{k_2}$ et que, par exemple, elle ne soit pas valeur singulière de k_1 et soit toujours γ_1 le noyau résolvant correspondant. L'équation (40) sera équivalente à

$$(40') \qquad \left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{k_2}\right) \overset{0}{\varphi} = \left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{\gamma_1}\right) f = f - \lambda \overset{0}{\gamma_1} \overset{0}{f}.$$

Or $\overset{0}{k_2}\overset{0}{\gamma_1}\overset{0}{f}$ est nul puisque les noyaux k_1 et k_2 sont orthogonaux, par suite aussi k_2 et γ_1. L'équation intégrale

$$\left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{k_2}\right) \overset{0}{\varphi} = - \lambda \overset{0}{\gamma_1} \overset{0}{f}$$

a donc pour solution particulière $-\lambda \overset{0}{\gamma_1} \overset{0}{f}$. L'équation intégrale proposée admettra donc des solutions en même temps que

$$\left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{k_2}\right) \overset{0}{\varphi} = f$$

et, si $\Phi(x)$ est la solution générale de cette dernière équation, que l'on suppose exister, on aura

$$\varphi = \Phi - \lambda \overset{0}{\gamma_1} \overset{0}{f}.$$

Dans le cas où λ n'était valeur singulière pour aucun des noyaux k_1 et k_2, le résultat obtenu résultait immédiatement de la forme du noyau résolvant.

27. Examinons, en nous bornant à l'équation homogène, le cas où λ est valeur caractéristique à la fois pour k_1 et k_2. L'équation intégrale peut s'écrire

$$(40'') \qquad \left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{k_1}\right)\left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{k_2}\right) \overset{0}{\varphi} = 0,$$

et elle équivaut à

$$\left(\overset{0}{1}{}^0 - \lambda \overset{0}{k_2}\right) \overset{0}{\varphi} = \overset{0}{\Phi}$$

en désignant par $\Phi(x)$ une solution fondamentale quelconque du noyau k_1. Mais, dans ces conditions

$$\Phi = \lambda \overset{o}{k}_1 \overset{o}{\Phi}$$

et, par suite,

$$\overset{o}{k}_2 \overset{o}{\Phi} = \lambda \overset{o}{k}_2 \overset{o}{k}_1 \overset{o}{\Phi} = o,$$

de sorte que $(40'')$ a pour solution particulière Φ et que sa solution générale est

$$\varphi = \Phi + \Phi',$$

Φ' étant une solution fondamentale quelconque du noyau k_2.

Nous aboutissons donc à la conclusion suivante :

Quand λ est valeur singulière des deux noyaux k_1, k_2 orthogonaux, les fonctions fondamentales du noyau $k_1 + k_2$ sont celles des deux noyaux k_1 et k_2.

L'égalité précédente

$$\overset{o}{k}_2 \overset{o}{\Phi} = o$$

exprime *par définition* que Φ est *semi-orthogonale* au noyau k_2 de sorte que l'on a aussi l'énoncé suivant :

Quand deux noyaux k_1 et k_2 sont orthogonaux, toute fonction fondamentale de l'un est semi-orthogonale à l'autre [1].

28. Ajoutons un résultat concernant le déterminant $\Delta(\lambda)$ du noyau K. *Il est le produit $\Delta_1(\lambda)\Delta_2(\lambda)$ des deux déterminants relatifs aux noyaux k_1 et k_2 dont* K *est la somme.*

On s'en rendra compte en notant que la trace de $\overset{o}{K}{}^n$ est la somme des traces de $\overset{o}{k}{}_1^n$ et $\overset{o}{k}{}_2^n$ puisque

$$\overset{o}{K}{}^n = \overset{o}{k}{}_1^n + \overset{o}{k}{}_2^n,$$

et en se reportant au développement en série de $\log\Delta(\lambda)$.

---

[1] Ceci s'applique, bien entendu aussi aux fonctions fondamentales Ψ associées aux Φ; si l'on veut garder les notations de la composition, on désignera par y la variable de Ψ (*cf.* n° 12) et la semi-orthogonalité de Ψ, qui vérifie $\Psi = \lambda \overset{o}{\Psi} \overset{o}{k}_1$, s'écrira $\overset{o}{\Psi} \overset{o}{k}_2 = o$.

Le théorème s'étend évidemment à la somme d'un nombre quelconque de noyaux orthogonaux deux à deux.

Il s'étend aussi à la somme de *deux* noyaux semi-orthogonaux. Si, par exemple,

$$\overset{0}{k}_1 \overset{0}{k}_2 = 0, \qquad \text{mais} \quad \overset{0}{k}_2 \overset{0}{k}_1 \neq 0,$$

il apparaît dans $\overset{0}{K}{}^n$, en plus des termes $\overset{0}{k}{}_1^n$ et $\overset{0}{k}{}_2^n$, des termes de la forme $\overset{0}{k}{}_2^p \overset{0}{k}{}_1^q$.

Mais, lorsqu'on forme la trace, l'ordre de composition de $\overset{0}{k}{}_2^p$ et $\overset{0}{k}{}_1^q$ n'intervient pas, de sorte que

$$\text{trace de } \overset{0}{k}{}_2^p \overset{0}{k}{}_1^q = \text{trace de } \overset{0}{k}{}_1^q \overset{0}{k}{}_2^p = 0,$$

et la démonstration précédente subsiste.

29. Décomposition d'un noyau. — Nous avons vu au début du paragraphe que la partie principale $\gamma(\lambda)$ d'un noyau résolvant quelconque pour l'un de ses pôles $\lambda = c$ est elle-même un noyau résolvant (celui du noyau principal k du pôle).

Soit un pôle différent $\lambda = c'$ donnant la partie principale $\gamma'(\lambda)$; on pourra écrire

$$\Gamma(\lambda) = \gamma(\lambda) + \gamma'(\lambda) + \Gamma_2(\lambda),$$

$\Gamma_2(\lambda)$ n'ayant plus ni le pôle c ni le pôle c'. D'après le n° **24** on peut d'ailleurs écrire

$$\overset{0}{\gamma}(\lambda)\left[\overset{0}{\gamma}{}'(\lambda_1) + \overset{0}{\Gamma}_2(\lambda_1)\right] = 0$$

et, aussi,

$$\left[\overset{0}{\gamma}(\lambda) + \overset{0}{\Gamma}_2(\lambda)\right]\overset{0}{\gamma}{}'(\lambda_1) = 0,$$

il en résulte que

$$\overset{0}{\gamma}(\lambda)\overset{0}{\Gamma}_2(\lambda_1) = \overset{0}{\Gamma}_2(\lambda)\overset{0}{\gamma}{}'(\lambda_1),$$

la valeur commune étant forcément zéro, puisque le premier membre n'a que des termes singuliers en $\lambda - c$, tandis que le second membre est régulier pour $\lambda = c$. Il en résulte enfin que

$$\overset{0}{\gamma}(\lambda)\overset{0}{\gamma}{}'(\lambda_1) = 0$$

et, de même,

$$\overset{0}{\gamma}{}'(\lambda_1)\overset{0}{\gamma}(\lambda) = 0.$$

Par suite :

Deux noyaux principaux concernant deux pôles différents sont orthogonaux entre eux.

30. Le noyau résolvant d'un noyau quelconque $K(x, y)$ apparaît donc, sous réserve de certaines questions de convergence, comme la somme de noyaux deux à deux orthogonaux : les noyaux principaux des divers pôles et un noyau résiduel n'ayant plus aucun pôle.

La partie principale $\gamma(x, y; \lambda)$ du pôle $\lambda = c$ est résolvante du noyau principal $k(x, y) = -\gamma(x, y; 0)$ et l'équation homogène formée avec le noyau K admet, pour $\lambda = c$, les mêmes solutions fondamentales que l'équation homogène formée avec le noyau k. Il est donc naturel d'étudier en détail la structure d'un noyau principal et, en particulier. de rechercher si il est déterminé par la donnée des solutions fondamentales du pôle c. Ce sera l'objet du paragraphe suivant.

V. — DÉCOMPOSITION D'UN NOYAU PRINCIPAL EN NOYAUX CANONIQUES.

31. Soit un noyau principal $k(x, y)$ correspondant au pôle $\lambda = c$ d'ordre m et dont la résolvante est

$$\gamma(x, y; \lambda) = \frac{a_m(x, y)}{(\lambda - c)^m} + \frac{a_{m-1}(x, y)}{(\lambda - c)^{m-1}} + \ldots + \frac{a_1(x, y)}{\lambda - c}.$$

Nous vérifierons d'abord que toutes les fonctions $a_i(x, y)$ sont de forme

$$\sum_i X_i(x) Y_i(y),$$

somme de produits obtenus en prenant une fonction de x multipliée par une fonction de y. Partons pour cela de l'équation. qui caractérise les noyaux résolvants

$$(34) \qquad \frac{d\Gamma}{d\lambda} = -\overset{\circ}{\Gamma^2},$$

(n° 23). En y substituant γ et en identifiant par rapport à λ il vient les conditions suivantes :

$$(41) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_1 = \overset{\circ}{a_1^2}, \\ 2a_2 = \overset{\circ}{a_1}\overset{\circ}{a_2} + \overset{\circ}{a_2}\overset{\circ}{a_1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ na_n = \overset{\circ}{a_1}\overset{\circ}{a_n} + \overset{\circ}{a_2}\overset{\circ}{a_{n-1}} + \ldots + \overset{\circ}{a_n}\overset{\circ}{a_1}; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

or la première des (41) peut s'écrire

$$a_1 = \overset{0}{h} \overset{0}{a_1}$$

en posant pour un instant $h = a_1$; il en résulte que le noyau h a la valeur fondamentale *un* et que, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ... étant un système de solutions fondamentales, on a

$$a_1 = c_1(y)\varphi_1(x) + c_2(y)\varphi_2(x) + \ldots;$$

a_2 est de même forme, car

$$2a_2 = \varphi_1(x)\int_a^b c_1(\xi)\,a_2(\xi, y)\,d\xi + \ldots + c_1(y)\int_a^b a_2(x, \xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi + \ldots,$$

et ainsi de suite.

Le résultat annoncé est ainsi établi et il en résulte évidemment que le noyau principal considéré

$$k(x, y) = -\gamma(x, y; 0)$$

sera lui aussi de forme analogue. Nous poserons

$$(42) \qquad k(x, y) = X_1(x)Y_1(y) + X_2(x)Y_2(y) + \ldots + X_N(x)Y_N(y),$$

où l'on peut toujours supposer que les fonctions X et Y sont linéairement indépendantes.

32. Le noyau principal peut évidemment être mis d'une infinité de manières sous la forme (42), les fonctions X_1, ..., X_N étant remplacées par des combinaisons linéaires indépendantes et les $Y_1, \ldots, Y_N$ par des combinaisons linéaires convenablement choisies. Nous nommerons *fonction principale* du noyau k toute combinaison linéaire des X et *fonction principale associée* toute combinaison linéaire des Y. Le noyau étant mis sous la forme (42), X_1, X_2, ..., X_N sont dits former un *groupe principal*, Y_1, Y_2, ..., Y_N le *groupe principal associé*.

Il est naturel de chercher à profiter de l'indétermination dans le choix du groupe principal pour mettre le noyau sous une forme la plus simple possible.

33. **Digression sur les noyaux de type $\Sigma_j X_j(x) Y_j(y)$.** — Avant

d'aborder cette question nous indiquerons rapidement quelques propriétés des noyaux les plus généraux du type

$$K(x, y) = \sum_{1}^{N} X_i(x) Y_i(y), \tag{43}$$

les fonctions X_i et Y_i étant toujours indépendantes.

L'équation de Fredholm formée avec le noyau K s'écrit

$$\varphi(x) - \lambda \sum_{1}^{N} X_i(x) \int_a^b Y_i(\xi) \varphi(\xi) \, d\xi = f(x) \tag{44}$$

et il est certain que toute solution de cette équation s'obtient en ajoutant à $f(x)$ une certaine combinaison linéaire des $X_i(x)$:

$$\varphi(x) = f(x) + A_1 X_1(x) + \ldots + A_N X_N(x).$$

Portant dans (44) on a pour déterminer les A_j des équations du premier degré dont le déterminant est

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda a_{11} & -\lambda a_{21} & \ldots & -\lambda a_{N1} \\ -\lambda a_{12} & 1 - \lambda a_{22} & \ldots & -\lambda a_{N2} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ -\lambda a_{1N} & -\lambda a_{2N} & \ldots & 1 - \lambda a_{NN} \end{vmatrix}$$

en posant

$$a_{ik} = \overset{0}{Y}_k \overset{0}{X}_i = \int_a^b X_i(\xi) Y_k(\xi) \, d\xi.$$

Si $D(\lambda)$ n'est pas nul, la solution est unique et on la met de suite sous la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \frac{\lambda}{D(\lambda)} \int_a^b D\left(\begin{matrix} x \\ \xi \end{matrix}; \lambda\right) f(\xi) \, d\xi$$

avec

$$D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right) = - \begin{vmatrix} 0 & X_1(x) & \ldots & X_N(x) \\ Y_1(y) & 1 - a_{11}\lambda & \ldots & -\lambda a_{N1} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ Y_N(y) & -\lambda a_{1N} & \ldots & -\lambda a_{NN} \end{vmatrix}.$$

Nous obtenons ainsi, pour le cas particulier envisagé une forme nouvelle du noyau résolvant. Mais on vérifie facilement l'identité entre $D(\lambda)$, $D\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)$ et les fonctions de Fredholm $\Delta(\lambda)$ $\Delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)$,

On peut d'ailleurs passer de ce cas particulier élémentaire à des cas plus

généraux (par exemple au cas d'un noyau continu quelconque que l'on considérera comme limite uniforme de polynomes en x et y, lesquels se mettent sous la forme étudiée dans ce numéro) ([1]).

Pour la suite nous aurons besoin de la remarque suivante : si le déterminant $D(\lambda)$ est effectivement du degré N la résolvante

$$-\frac{D\left(\begin{matrix}x\\y\end{matrix};\lambda\right)}{D(\lambda)}$$

se présente comme quotient d'un polynome de degré au plus $N-1$ par un polynome de degré N et elle est nulle pour $\lambda=\infty$. On vérifiera facilement que, dans tout autre cas, la résolvante ne tend pas vers zéro pour $\lambda=\infty$ ([2]).

34. Dans le cas d'un noyau principal la résolvante est précisément nulle pour $\lambda=\infty$, de sorte que $D(\lambda)$ est effectivement de degré N. De plus les fonctions X et Y doivent être telles que ce déterminant $D(\lambda)$ se réduise à

$$\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)^N,$$

puisque la seule valeur caractéristique est c.

35. **Réduction du noyau principal.** — Le noyau principal du pôle c étant

$$k(x,y)=X_1(x)Y_1(y)+\ldots X_N(x)Y_N(y),$$

on a évidemment

$$\overset{0}{k}\overset{0}{X}_i=X_1a_{i1}+X_2a_{i2}+\ldots+X_Na_{iN}\qquad(i=1,2,\ldots,N),$$

ce qui définit une substitution linéaire effectuée sur les fonctions $X_1, \ldots, X_N$. On peut chercher à réduire cette substitution à la forme canonique, en recherchant d'abord les combinaisons linéaires

$$X=A_1X_1+\ldots+A_NX_N$$

([1]) Pour ces questions *cf.* GOURSAT, [37], p. 386, [36]; LEBESGUE, [59].

([2]) On s'en rendra compte aisément en se ramenant d'abord, par substitution linéaire effectuée sur les $X_i(x)$, au cas où les coefficients précédents a_{ik} sont nuls pour $i<k$.

à coefficients constants, telles que

$$\overset{0}{k}\overset{0}{X} = \mu X,$$

où μ est une constante, ce qui donne, pour déterminer μ, une équation qui n'est autre que

$$\mu^N \left[D\left(\frac{1}{\mu}\right) \right] = 0,$$

c'est-à-dire

$$\left(\frac{1}{c} - \mu\right)^N = 0.$$

Dans ces conditions, on vérifie aisément qu'il existe N combinaisons linéaires des X, que nous désignerons par la lettre φ, lesquelles se partagent en groupes :

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_q(x); \quad \varphi'_1(x), \quad \ldots, \quad \varphi'_{q'}(x);$$
$$\varphi''_1(x), \quad \ldots, \quad \varphi''_{q''}(x); \quad \ldots.$$

les fonctions de chaque groupe vérifiant des conditions du type

$$(45) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = c\overset{0}{k}\overset{0}{\varphi}_1, \\ \varphi_1 + \varphi_2 = c\overset{0}{k}\overset{0}{\varphi}_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{q-1} + \varphi_q = c\overset{0}{k}\overset{0}{\varphi}_q. \end{cases}$$

En désignant par $\psi_1(y), \ldots, \psi_q(y); \psi'_1(y), \ldots, \psi'_{q'}(y); \psi''_1(y), \ldots, \psi''_{q''}(y); \ldots$, les fonctions principales associées, le noyau k s'écrit

$$(46) \qquad \begin{aligned} k = {} & \varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_q(x)\psi_q(y) \\ & + \varphi'_1(x)\psi'_1(y) + \ldots + \varphi'_{q'}(x)\psi'_{q'}(y) \\ & + \varphi''_1(x)\psi''_1(y) + \ldots + \varphi''_{q''}(x)\psi''_{q''}(y) + \ldots. \end{aligned}$$

36. Les (45), où l'on remplace k par la valeur (46), et où l'on tient compte de l'indépendance des fonctions principales, entraînent alors les relations

$$(47) \qquad \begin{cases} \overset{0}{\psi}_1\overset{0}{\varphi}_1 = \dfrac{1}{c}, \\ \overset{0}{\psi}_1\overset{0}{\varphi}_2 = \overset{0}{\psi}_2\overset{0}{\varphi}_2 = \dfrac{1}{c}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \overset{0}{\psi}_{q-1}\overset{0}{\varphi}_q = \overset{0}{\psi}_q\overset{0}{\varphi}_q = \dfrac{1}{c}, \end{cases}$$

et les relations analogues avec les $\varphi'\psi'$, $\varphi''\psi''$, ...; on en tire aussi que toute fonction φ, ou φ', ou φ'', ... est orthogonale à chacune des fonctions ψ, ψ', ψ'', ..., sauf pour les cas que mettent en évidence les formules (47).

Ces relations montrent d'ailleurs une symétrie entre les φ, φ', φ''. ... et les ψ, ψ', ψ'' respectivement, car on en déduit. par exemple,

$$(48)\qquad \left\{\begin{aligned} \psi_q &= c\,\overset{0}{\psi}_q\,\overset{0}{k},\\ \psi_q + \psi_{q-1} &= c\,\overset{0}{\psi}_{q-1}\,\overset{0}{k},\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \psi_2 + \psi_1 &= c\,\overset{0}{\psi}_1\,\overset{0}{k}. \end{aligned}\right.$$

37. Noyaux canoniques; résolvante canonique. — La formule (46) montre que le noyau principal est la somme des noyaux

$$\begin{gathered} \varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_q(x)\psi_q(y),\\ \varphi'_1(x)\psi'_1(y) + \ldots + \varphi'_{q'}(x)\psi'_{q'}(y),\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{gathered}$$

dont chacun est dit *noyau canonique*. Ces divers noyaux sont, d'après l'orthogonalité des φ avec les ψ', ..., orthogonaux deux à deux. De plus, d'après les (45) et (48) [1], chacun de ces noyaux donne un couple et un seul de fonctions fondamentales associées, ces fonctions étant $\varphi_1(x)$ et $\psi_q(y)$ pour le premier noyau, $\varphi'_1(x)$ et $\psi'_{q'}(y)$ pour le second, et ainsi de suite. *Un noyau principal se décompose donc en autant de noyaux canoniques qu'il y a de fonctions fondamentales linéairement distinctes.*

Les résolvantes des divers noyaux canoniques s'ajouteront, puisqu'ils sont orthogonaux. Examinons quelle sera la forme de chacune d'elles.

Le cas le plus simple est celui où, q étant égal à 1, le noyau canonique se réduit à

$$k = \varphi_1(x)\psi_1(y)$$

avec

$$\overset{0}{\psi}_1\,\overset{0}{\varphi}_1 = \frac{1}{c}.$$

---

(1) Dans lesquelles on peut d'ailleurs remplacer k par le noyau canonique correspondant au groupe des fonctions φ ψ que concernent les formules.

Dans ces conditions, les noyaux itérés (*puissance de composition*) sont

$$\overset{0}{k}{}^2 = \frac{1}{c}\varphi_1(x)\psi_1(y), \qquad \overset{0}{k}{}^3 = \frac{1}{c^2}\varphi_1(x)\psi_1(y), \ \ldots,$$

de sorte que le noyau résolvant, calculé à partir du développement en série, est

$$\gamma(x, y; \lambda) = -\frac{\varphi_1(x)\psi_1(y)}{1-\frac{\lambda}{c}},$$

le pôle correspondant étant du premier ordre.

Passons au cas général en rappelant que les $\overset{0}{\psi}_j\overset{0}{\varphi}_i$ sont nulles, sauf [d'après les (47)] :

$$(49) \qquad \overset{0}{\psi}_i\overset{0}{\varphi}_i = \frac{1}{c},$$

$$(50) \qquad \psi_i\overset{0}{\varphi}_{i+1} = \frac{1}{c}.$$

En tenant compte des (49) seulement, il apparaît dans les noyaux itérés successifs des termes tout analogues à ceux qui ont été obtenus pour $q = 1$. De ce fait, le noyau résolvant cherché contient l'expression

$$-\frac{\varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_q(x)\psi_q(y)}{1-\frac{\lambda}{c}}.$$

Mais, à cause des (50), le noyau itéré $\overset{0}{k}{}^2$ contient aussi un terme en $\varphi_1(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_{q-1}(x)\psi_q(y)$ avec le coefficient $\frac{1}{c}$; on voit de suite que ces termes se retrouvent dans les noyaux itérés suivants avec les coefficients $\frac{2}{c^2}$, $\frac{3}{c^3}$, ..., et ils donnent donc en tout pour le noyau résolvant

$$-\frac{\lambda}{c\left(1-\frac{\lambda}{c}\right)^2}[\varphi_1(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_{q-1}(x)\psi_q(y)].$$

On mettra en évidence, de même, des termes en

$$\varphi_1(x)\psi_3(y) + \ldots + \varphi_{q-2}(x)\psi_q(y)$$

dans $\overset{0}{k}{}^3$ et les suivants, et ainsi de suite. Finalement le noyau

résolvant sera

$$\gamma(x,y;\lambda) = -\left\{ \frac{\varphi_1(x)\psi_1(y) + \ldots + \varphi_q(x)\psi_q(y)}{1 - \frac{\lambda}{c}} + \frac{\lambda}{c}\,\frac{\varphi_1(x)\psi_2(y) + \ldots + \varphi_{q-1}(x)\psi_q(y)}{\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^2} + \ldots + \left(\frac{\lambda}{c}\right)^{q-1} \frac{\varphi_1(x)\psi_q(y)}{\left(1 - \frac{\lambda}{c}\right)^q} \right\},$$

et il a le pôle c avec l'ordre q.

38. **Conséquences.** — Reprenons un noyau quelconque $K(x,y)$, et envisageons le pôle c de la résolvante pour lequel il y à n solutions fondamentales distinctes : n sera dit *rang* du pôle. Le noyau principal correspondant se décomposera en n noyaux canoniques comprenant respectivement q_1, q_2, ..., q_n fonctions principales, et il est clair, d'après ce qui précède, que l'*ordre* m du pôle est le plus grand des nombres q_1, q_2, ..., q_n, tandis que le degré p de multiplicité de la racine c du déterminant $\Delta(\lambda)$ sera

$$p = q_1 + q_2 + \ldots + q_n.$$

On a donc les inégalités

$$m + n - 1 \leqq p \leqq mn.$$

Un cas particulier intéressant est celui d'un pôle du premier ordre $m = 1$. On a alors $p = n$. Les fonctions principales coïncident avec les fonctions fondamentales. En désignant ces dernières par φ_1, φ_2, ..., φ_n et par ψ_1, ψ_2, ..., ψ_n les fonctions fondamentales associées, chaque noyau canonique sera

$$\varphi_i(x)\psi_i(y),$$

pourvu que l'on choisisse les φ_i et les ψ_i de façon à satisfaire

$$(51) \qquad \overset{0}{\psi}_k \overset{0}{\varphi}_i = 0 \quad (i \neq k), \qquad \overset{0}{\psi}_i \overset{0}{\varphi}_i = \frac{1}{c},$$

ce qui est facile.

Le cas du pôle du premier ordre est d'ailleurs caractérisé par la condition suivante :

Aucune combinaison linéaire des fonctions fondamentales φ *n'est orthogonale à toutes les fonctions fondamentales associées* ψ. La condition est bien nécessaire, d'après les (51); d'autre part,

les (49), (50) montrent que, dans le cas d'un pôle multiple, il existera au moins une fonction fondamentale orthogonale à toutes les associées. L'énoncé est ainsi justifié.

39. Envisageons maintenant deux noyaux *principaux* k et $k^{(1)}$, correspondant à des valeurs caractéristiques différentes; soient $\varphi_i(x)$, $\psi_i(y)$, $\varphi_j^{(1)}(x)$, $\varphi_j^{(1)}(y)$ les systèmes correspondants de fonctions principales (qui correspondent aux divers noyaux canoniques de k et de $k^{(1)}$). Il est facile de voir que toute φ_i ou ψ_i est semi-orthogonale au noyau $k^{(1)}$, et *vice versa*.

Prenons, par exemple, φ_1 qui satisfait, d'après (45),

$$\overset{0}{\varphi}_1 = c\overset{0}{k}\overset{0}{\varphi}_1,$$

on aura

$$\overset{0}{k}{}^{(1)}\overset{0}{\varphi}_1 = c\overset{0}{k}{}^{(1)}\overset{0}{k}\overset{0}{\varphi}_1 = 0,$$

puisque

$$\overset{0}{k}{}^{(1)}\overset{0}{k} = 0.$$

Pour

$$\varphi_2 = -\varphi_1 + c\overset{0}{k}\overset{0}{\varphi}_2,$$

on aura la même condition, etc. Comme conséquence immédiate, on a que toute fonction principale du noyau k est orthogonale à toute fonction principale associée du noyau $k^{(1)}$ [1].

Nous avons déjà vu au n° 36 que, étant donnés les divers noyaux canoniques qui forment un même noyau principal, toute fonction principale de l'un d'eux est orthogonale à toute fonction associée d'un autre, et les différents noyaux canoniques envisagés sont donc orthogonaux entre eux. En rapprochant ces résultats de ceux qui viennent d'être établis, on voit que le noyau quelconque K donne naissance à des noyaux canoniques qui sont *orthogonaux, qu'ils correspondent au même pôle ou à des pôles différents*, et que les fonctions principales de l'un des noyaux canoniques sont orthogonales à toute fonction principale associée de tout autre noyau canonique.

---

[1] En particulier, les solutions fondamentales des deux équations associées qui correspondent à des pôles différents sont orthogonales.

CHAPITRE IX.

COMPLÉMENTS.
SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES; CAS DES INTÉGRALES MULTIPLES.
NOYAUX DISCONTINUS.

Nous réunissons dans le présent Chapitre l'étude de questions assez diverses. Toutes concernent des extensions possibles de méthodes qui ont été exposées (Chap. VIII) dans le cas le plus simple.

I. — SYSTÈMES D'ÉQUATIONS INTÉGRALES. ÉQUATIONS OU FIGURENT DES INTÉGRALES MULTIPLES.

1. Systèmes. — Fredholm a indiqué comment sa méthode pouvait être appliquée à un système de n équations intégrales à n fonctions inconnues

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x).$$

Par une analyse très élégante il ramène en effet un tel système à une seule équation intégrale de son type (¹).

Nous pouvons nous borner à examiner le cas de deux équations que nous écrirons

$$(1)\quad \begin{cases} \varphi_1(x) - \lambda \displaystyle\int_0^1 K_{11}(x, \xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi - \lambda \int_0^1 K_{12}(x, \xi)\varphi_2(\xi)\,d\xi = f_1(x), \\ \varphi_2(x) - \lambda \displaystyle\int_0^1 K_{21}(x, \xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi - \lambda \int_0^1 K_{22}(x, \xi)\varphi_2(\xi)\,d\xi = f_2(x), \end{cases}$$

en admettant, ce qui ne restreint pas la généralité, que l'intervalle précédent (a, b) est remplacé par $(0, 1)$. Les seconds membres f_1 et f_2

(¹) FREDHOLM, [30].

sont donc donnés pour $0 \leqq x \leqq 1$, les noyaux $K_{ij}(x, y)$ pour $0 \leqq x \leqq 1$, $0 \leqq y \leqq 1$; on cherche dans le même intervalle les inconnues $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$.

Construisons un nouveau noyau $K(x, y)$, dans le champ

$$0 \leqq x \leqq 2, \qquad 0 \leqq y \leqq 2,$$

de la manière suivante : nous prendrons

$$\begin{array}{lll} K(x, y) = K_{11}(x, y) & \text{pour} & 0 \leqq x < 1, \quad 0 \leqq y < 1, \\ K(x, y) = K_{21}(x-1, y) & \text{pour} & 1 \leqq x \leqq 2, \quad 0 \leqq y < 1, \\ K(x, y) = K_{12}(x, \quad y-1) & \text{pour} & 0 \leqq x < 1, \quad 1 \leqq y \leqq 2, \\ K(x, y) = K_{22}(x-1, y-1) & \text{pour} & 1 \leqq x \leqq 2, \quad 1 \leqq y \leqq 2. \end{array}$$

Le noyau K prend donc les valeurs de $K_{11}(x, y)$, $K_{21}(x-1, y)$. $K_{12}(x, y-1)$, $K_{22}(x-1, y-1)$ dans les carrés respectifs (1), (2), (3). (4) de la figure.

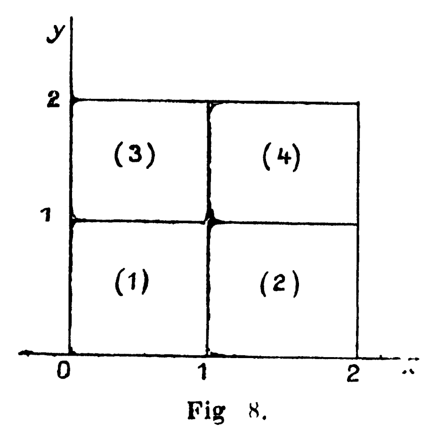


Fig 8.

Remplaçons enfin les deux fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$ par la fonction $f(x)$ donnée par

$$f(x) = f_1(x) \quad (0 \leqq x < 1), \qquad f(x) = f_2(x-1) \quad (1 \leqq x \leqq 2)$$

et posons enfin

$$\varphi(x) = \varphi_1(x) \quad (0 \leqq x < 1), \qquad \varphi(x) = \varphi_2(x-1) \quad (1 \leqq x \leqq 2).$$

Le système (1) pourra être remplacé par l'équation unique

$$(2) \qquad \varphi(x) = \lambda \int_0^2 K(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi + f(x)$$

à laquelle s'applique la méthode générale donnée : le noyau $K(x, y)$ et

le second membre $f(x)$ sont en général discontinus (pour $x = 1, y = 1$), mais il est bien clair que de telles discontinuités n'amènent aucune difficulté.

2. Équations intégrales où figurent des intégrales multiples. — Prenons par exemple

$$(3) \qquad \varphi(x, y) - \lambda \int_0^1 d\xi \int_0^1 d\eta \, K(x, y \mid \xi, \eta)\varphi(\xi, \eta) = f(x, y).$$

La méthode de Fredholm s'appliquera : il suffira de remplacer dans les formules que nous avons données chacune des variables $x, \xi, \ldots,$ par un groupe de variables (x, y), (ξ, η), ... paraissant dans la nouvelle équation. C'est ainsi, par exemple, que, pour écrire le déterminant de Fredholm de l'équation (3), on prendra

$$K\begin{pmatrix} x_1, y_1; & x_2, y_2; & \ldots; & x_\nu, y_\nu \\ x_1, y_1; & x_2, y_2; & \ldots; & x_\nu, y_\nu \end{pmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} K(x_1, y_1 \mid x_1, y_1), & K(x_1, y_1 \mid x_2, y_2), & \ldots, & K(x_1, y_1 \mid x_\nu, y_\nu) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots \\ K(x_\nu, y_\nu \mid x_1, y_1), & K(x_\nu, y_\nu \mid x_2, y_2), & \ldots, & K(x_\nu, y_\nu \mid x_\nu, y_\nu) \end{vmatrix}$$

et l'on formera la série

$$\Delta(\lambda) = 1 + \sum_1^\infty{}_\nu (1-)^\nu \frac{\lambda^\nu}{\nu!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 K\begin{pmatrix} x_1, y_1; & \ldots; & x_\nu, y_\nu \\ x_1, y_1; & \ldots; & x_\nu, y_\nu \end{pmatrix} dx_1\, dy_1 \ldots dx_\nu\, dy_\nu.$$

Le champ d'intégration de l'équation (3) (carré : $0 \leqq x, y \leqq 1$) pourra d'ailleurs être remplacé par une aire quelconque du plan xy.

Plus généralement on est conduit, par des problèmes de la Physique mathématique, à des équations intégrales pour lesquelles le second membre et l'inconnue sont des fonctions d'un point M pris arbitrairement sur une multiplicité $\mathfrak{V}$ appartenant à l'espace ordinaire (ou à un espace géométrique quelconque). Le noyau est une fonction K(M, P) de deux points M et P variables sur la multiplicité $\mathfrak{V}$. Désignons enfin par dP un élément *d'étendue* (longueur, surface, volume, etc.) pris autour du point P, les méthodes du Chapitre précédent vaudront encore pour l'équation

$$(4) \qquad \varphi(M) - \lambda \int_{\mathfrak{V}} K(M, P)\varphi(P)\, dP = f(M)$$

(où l'intégrale est prise par rapport au point P et étendue à la multiplicité $\mathcal{V}$) : on remplacera encore les variables x, ξ, ... du Chapitre VIII par les points M, P, etc.

3. Notons enfin que, dans le cas d'un système d'équations du type (4), on pourra, par le même procédé qu'au nº 1, se ramener à une seule équation.

II. — NOYAUX DISCONTINUS.

4. **Divers types de noyaux discontinus.** — Nous revenons à l'équation simple de Fredholm traitée au Chapitre VIII dans l'hypothèse que les fonctions considérées étaient finies et continues. Il convient d'examiner maintenant des hypothèses plus générales.

Le cas le plus immédiat sera celui d'un noyau $K(x, y)$ restant borné, mais pouvant avoir des discontinuités sur certaines lignes formées, par exemple, d'arcs continus et à tangente continue, en nombre fini ou dénombrable. Il est d'ailleurs utile de distinguer deux sortes de telles lignes.

Les lignes de discontinuité de la première sorte seront caractérisées par la condition de n'être rencontrées qu'en un nombre fini de points par une parallèle à l'un des axes. On vérifie très aisément que la discontinuité correspondante disparaît par composition; de même $K(x, y)$ étant un noyau de première sorte et $f(x)$ une fonction telle que $\int_a^b |f(x)|\,dx$ existe, une fonction telle que

$$\int_a^b K(x, \xi) f(\xi)\,d\xi$$

sera continue.

Les lignes de discontinuité de la seconde sorte seront constituées par des segments parallèles à l'un des axes. L'une de ces lignes étant sur la droite $x = x_0$, il arrive souvent que $K(x, y)$ a des limites (différentes bien entendu) suivant que x tend vers x_0 par valeurs supérieures ou bien inférieures. Nous désignerons de telles limites, suivant une notation habituelle, par $K(x_0 + 0, y)$ et $K(x_0 - 0, y)$. De telles discontinuités ne disparaissent pas forcément par compo-

sition; on retrouvera en général dans une intégrale

$$\int_a^b K(x, \xi) f(\xi)\, d\xi$$

la discontinuité (de seconde sorte) qu'aura le noyau pour $x = x_0$.

Nous avons déjà rencontré un cas (n° 1) de discontinuité de la deuxième sorte. Des discontinuités de la première sorte s'introduisent de même tout naturellement. Nous en avons même déjà eu un exemple (Chap. VI, n° 4) : l'équation de Fredholm

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi = f(x)$$

se réduit à l'équation de Volterra

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^x K(x, \xi) \varphi(\xi)\, d\xi = f(x)$$

si l'on suppose

$$K(x, y) = 0 \qquad \text{pour} \qquad y > x;$$

un tel noyau aura évidemment, en général, pour ligne de discontinuité (de première sorte) le segment $y = x$.

5. On pourra considérer aussi des noyaux pour lesquels les discontinuités sont réparties de façon plus compliquée. Il y aura lieu également d'examiner les noyaux non bornés.

Un cas particulier important, et que nous examinerons par la suite, est celui des noyaux qui deviennent infinis pour $y = x$, comme $\frac{1}{(y - x)^\alpha}$ $(0 < \alpha < 1)$. Une classification générale des noyaux non bornés, du point de vue de la résolution des équations intégrales correspondantes, paraît devoir reposer sur l'existence d'intégrales telles que

$$\int_a^b \int_a^b |K(\xi, \eta)|^2\, d\xi\, d\eta$$

ou

$$\int_a^b \int_a^b |K(\xi, \eta)|^\alpha\, d\xi\, d\eta \qquad (1 < \alpha < 2)$$

et aussi sur le fait que des intégrales telles que

$$\int_a^b |K(x, \xi)| \, d\xi$$

sont ou non bornées quand x varie.

Enfin, pour terminer ces remarques générales, indiquons le cas où l'intervalle d'intégration est infini. Comme on l'a déjà vu à propos des limites variables (Chap. VII, § III), on peut toujours se ramener, par changement de variable, à un intervalle d'intégration (a, b) fini : en général on reporte ainsi, sur la forme du noyau, la singularité due aux limites d'intégration infinies.

Tous ces cas ont été l'objet de travaux nombreux et leur étude est cependant loin d'être épuisée. Nous essayerons, dans la suite, de donner une idée de quelques méthodes.

6. Extensions de la méthode des approximations successives. — En ce qui concerne d'abord le procédé d'approximations successives (Chap. VI, n° 30), qui ne donne pas en général une solution de l'équation de Fredholm quel que soit λ, mais qui s'applique à des valeurs pas trop grandes de λ, nous pourrions nous contenter de renvoyer le lecteur aux remarques déjà faites à propos des équations de Volterra.

Le cas de discontinuités telles que celles du n° 4 s'envisagera sans difficulté, et il est aisé de traiter également des noyaux non bornés. Contentons-nous d'énoncer un résultat assez général (¹) :

Si l'on a, presque partout par rapport à la variable restante, l'une des inégalités

$$(a) \qquad \int_a^b |K(x, y)| \, dx \leqq q(b-a)$$

ou

$$(b) \qquad \int_a^b |K(x, y)| \, dy \leqq q(b-a),$$

q étant un nombre positif donné, les noyaux itérés existent presque partout et la série qui définit le noyau résolvant converge de

(¹) Hille et Tamarkin, [13].

même pour $|\lambda| < \frac{1}{q}$; *la formule habituelle définit une solution de*

$$\varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\,d\xi = f(x)$$

dans les cas suivants :

1° *si* (*a*) *est satisfaite et que* f *soit sommable;*

2° *si,* (*b*) *étant vérifiée, l'intégrale* $\int_a^b |K(x, \xi)| f(\xi)\,d\xi$ *est bornée.*

La solution obtenue appartient à la même classe que la fonction $f(x)$.

7. Extensions de la méthode de Fredholm. Le Mémoire de Poincaré ([1]). — L'application des formules de Fredholm à un noyau borné, discontinu de la deuxième sorte (n° 5) est immédiate Mais, pour certaines discontinuités de la première sorte, on rencontre dès le début une difficulté, d'ailleurs plus apparente que réelle.

Remarquons que, d'après le développement en série,

$$(5) \qquad \log\Delta(\lambda) = -\left\{+k_1\lambda + k_2\frac{\lambda^2}{2} + \ldots + k_n\frac{\lambda^n}{n} + \ldots\right\},$$

le déterminant $\Delta(\lambda)$ s'exprime au moyen des *traces* $k_1, k_2, \ldots, k_n, \ldots$ des noyaux itérés de $K(x, y)$ (Chap. VIII, n° 20). D'autre part la fonction de Fredholm

$$(6) \quad \Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda\Big) = \Delta(\lambda)\left\{K(x, y) + \lambda \overset{(2)}{K}(x, y) + \ldots + \lambda^{n-1}\overset{(n)}{K}(x, y) + \ldots\right\}$$

s'exprime au moyen des traces précédentes et des noyaux itérés eux-mêmes. Or, dans le cas d'un noyau discontinu sur la ligne de première sorte $y = x$, la première trace k_1 n'aura aucun sens. Il en est ainsi dans le cas de l'exemple du n° 4 (relation entre l'équation de Volterra et l'équation de Fredholm).

La solution de la difficulté peut être rattachée à des remarques faites par Poincaré dans un Mémoire où l'on trouvera d'ailleurs une analyse profonde des fonctions de Fredholm. Le noyau résol-

---

([1]) POINCARÉ, [85].

yant $\Gamma(x, y; \lambda)$ a été mis sous la forme

$$-\frac{\Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

mais le numérateur et le dénominateur de cette expression peuvent évidemment être remplacés par les fonctions obtenues en multipliant (ou éventuellement en divisant) haut et bas par une même quantité. En particulier on pourra remplacer $\Delta(\lambda)$ par

$$\mathfrak{D}_n(\lambda) = e^{\left\{k_1\lambda + \ldots + k_{n-1}\frac{\lambda^{n-1}}{n-1}\right\}}\Delta(\lambda),$$

d'où

$$\log \mathfrak{D}_n(\lambda) = -\left\{k_n\frac{\lambda^n}{n} + \ldots\right\},$$

en prenant, au lieu de $\Delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)$,

$$\mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right) = \Delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)e^{k_1\lambda + \ldots + k_{n-1}\frac{\lambda^{n-1}}{n-1}}.$$

Les fonctions $\mathfrak{D}_n(\lambda)$ et $\mathfrak{D}_n\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)$ ne contiennent plus les traces k_1, k_2, ..., k_{n-1} (¹); elles restent fonctions entières de λ sous des conditions assez larges et peuvent alors servir de base à une théorie tout analogue à celle du Chapitre VIII.

Il en est ainsi, non seulement dans le cas de discontinuités telles que k_1 cesse d'avoir un sens (on prendra alors $n = 2$), mais dans le cas des noyaux non bornés tels que les noyaux itérés restent limités à partir de l'un d'eux $\overset{0}{K}{}^n(x, y)$. Dans ce cas, on a d'ailleurs

$$\frac{\mathfrak{D}'_n(\lambda)}{\mathfrak{D}_n(\lambda)} = -(k_n\lambda^{n-1} + k_{n+1}\lambda^n + \ldots) = \int_a^b \Gamma'(x, x; \lambda)\,dx$$

avec

$$\Gamma'(x, y; \lambda) = \Gamma + K + \lambda\overset{0}{K}{}^2 + \ldots + \lambda^{n-2}\overset{0}{K}{}^{n-1},$$

de sorte que les zéros de $\mathfrak{D}_n$ sont effectivement des pôles de Γ. Ayant

(¹) On les obtiendra à partir des développements de $\Delta(\lambda)$ et $\Delta\left(\begin{matrix} x \\ y \end{matrix}; \lambda\right)$ en supprimant dans les coefficients tous les termes qui dépendent de k_1, k_2, ..., k_{n-1}.

la résolvante

$$\Gamma(x, y; \lambda) = -\frac{\mathcal{D}_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda}{\mathcal{D}_n(\lambda)},$$

on pourra reprendre, par exemple, la démonstration du principe d'inversion en limitant éventuellement le champ des fonctions φ et f de façon que les compositions que l'on a à faire gardent un sens.

Une intéressante remarque de M. Hilbert [1] apparaît comme cas particulier. Soit un noyau de forme

$$K(x, y) = \frac{H(x, y)}{|y - x|^{\alpha}} \qquad \left(0 < \alpha < \frac{1}{2}\right)$$

où H reste borné. On vérifie (*cf.* infra nº 10) que $\overset{0}{K}{}^2$ est borné et continu avec H de sorte que l'on peut prendre dans la théorie qui précède $n = 2$ ou, ce qui revient au même, supprimer, dans les formules donnant $\Delta(\lambda)$ et $\Delta\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda)$ les termes qui contiennent k_1. Mais, si l'on revient aux expressions de Fredholm [Chap. VIII, formules (6) et (10)], on constate qu'il revient au même de supprimer dans les déterminants

$$K\begin{pmatrix} \xi_1, & \ldots, & \xi_\nu \\ \xi_1, & \ldots, & \xi_\nu \end{pmatrix}, \quad K\begin{pmatrix} x, & \xi_1, & \ldots, & \xi_\nu \\ y, & \xi_1, & \ldots, & \xi_\nu \end{pmatrix}$$

les éléments $K(\xi_i, \xi_i)$ de la diagonale principale, en les remplaçant par des zéros. Avec cette précaution on peut garder les expressions mêmes de Fredholm.

8. Autre méthode pour le cas où un noyau itéré est borné et continu [2]. — Elle est à certains égards moins satisfaisante, mais son exposé est très immédiat.

Par hypothèse le noyau $\overset{0}{K}{}^n(x, y)$ est borné et continu ainsi que les noyaux itérés suivants. La série

$$(7) \qquad -\left(K + \lambda \overset{0}{K}{}^2 + \ldots + \lambda^{n-1} K^n + \ldots\right)$$

(1) HILBERT, [42].
(2) Cette méthode a été donnée par Fredholm dans son Mémoire [30].

définit alors $\Gamma(x, y; \lambda)$ au moins pour les valeurs assez petites de $|\lambda|$, on aura toujours

$$\Gamma + K = \lambda \overset{0}{\Gamma} \overset{0}{K} = \lambda \overset{0}{K} \overset{0}{\Gamma}$$

et, pour des classes convenables de fonctions f et φ, la démonstration du principe de réciprocité restera valable, non seulement quand (7) converge, mais encore pour toutes valeurs de λ pour lesquelles on pourra prolonger la fonction analytique $\Gamma(\lambda)$.

Or, le noyau résolvant de $\overset{0}{K}{}^n$ est donné quel que soit λ, par les formules de Fredholm

$$(8) \qquad \Gamma_n(x, y; \lambda) = -\frac{\Delta_n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; \lambda}{\Delta_n(\lambda)},$$

$\Delta_n(\lambda)$ étant le déterminant de $\overset{0}{K}{}^n$ et l'on a

$$(9) \qquad \Gamma_n = -\left(\overset{0}{K}{}^n + \lambda \overset{0}{K}{}^{2n} + \ldots\right).$$

La comparaison de (7) et (9) montre immédiatement que l'on a, pour $|\lambda|$ assez petit,

$$(10) \quad \Gamma(x, y; \lambda) = -L(x, y; \lambda) + \lambda^{n-1}\Gamma_n(x, y; \lambda^n) + \lambda^n \overset{0}{L}(\lambda)\overset{0}{\Gamma}_n(\lambda^n)$$

avec

$$L = K + \lambda \overset{0}{K}{}^2 + \ldots + \lambda^{n-2}\overset{0}{K}{}^{n-1},$$

et cela donne le prolongement cherché de $\Gamma(\lambda)$. Il n'y a donc plus de difficulté à étendre *le principe d'inversion*.

D'après (10), $\Gamma(\lambda)$ est encore une fonction méromorphe dont les pôles devront être recherchés parmi les zéros de $\Delta_n(\lambda^n)$. Mais il n'est pas sûr que tout zéro de $\Delta_n(\lambda^n)$ donne un pôle : en effet, dans le cas où $\Delta(\lambda)$ existe, on vérifie sans peine que

$$\Delta_n(\lambda^n) = \Delta(\lambda)\Delta(\omega\lambda)\ldots\Delta(\omega^{n-1}\lambda)$$

ω étant une racine primitive de l'unité et les racines de $D_n(\lambda^n)$ sont, non seulement les racines λ_i de $\Delta(\lambda)$ mais celles de

$$\Delta(\omega^k\lambda) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Soient maintenant $\lambda = c$ un pôle de la résolvante $\Gamma(x, y; \lambda)$ définie par (10) et $\varphi(x)$ une fonction fondamentale correspondante, qui doit satisfaire

$$\overset{0}{\varphi}\left(\overset{0}{1}{}^0 - c\overset{0}{K}\right) = 0.$$

on en déduit, en composant par $\left[\overset{0}{1}{}^{0} + c\overset{0}{\mathrm{L}}(c)\right]$

$$\overset{0}{\varphi}\left(\overset{0}{1}{}^{0} - c^{n}\overset{0}{\mathrm{K}}{}^{n}\right) = 0.$$

Les fonctions fondamentales de K doivent être cherchées parmi celles de $\overset{0}{\mathrm{K}}{}^{n}$ pour le pôle c^{n} : elles seront en nombre fini (linéairement distinctes) et continues si $\overset{0}{\mathrm{K}}{}^{n}$ est continu. Ceci s'applique aussi aux fonctions principales (les noyaux canoniques se correspondent d'ailleurs dans l'itération). Sans qu'il soit besoin d'insister, on voit enfin que les résultats de Fredholm concernant le cas où λ prend une valeur fondamentale resteront valables.

9. Nous nous bornerons aux développements précédents, et nous nous contenterons de signaler d'autres recherches : celles de Carleman qui étudie la validité des formules de Fredholm dans le cas où l'intégrale double

$$\int\int |\mathrm{K}(x, y)|^2\, dx\, dy,$$

prise au sens de Lebesgue existe, celles de Egoroff et de beaucoup d'autres auteurs ([1]).

Nous terminerons en examinant le cas particulier des noyaux

$$\mathrm{K}(x, y) = \frac{\mathrm{H}(x, y)}{|y - x|^{\alpha}} \qquad (0 < \alpha < 1),$$

auxquels il a déjà été fait allusion, pour montrer que, dans le cas d'un tel noyau, la suite des noyaux itérés est formée de fonctions qui sont toutes bornées à partir d'un certain rang.

10. **Noyaux du type** $\dfrac{\mathrm{H}(x, y)}{|y - x|^{\alpha}}$. — Soient deux noyaux de ce type

$$\mathrm{K}_1 = \frac{\mathrm{H}_1(x, y)}{|y - x|^{\alpha_1}}, \qquad \mathrm{K}_2 = \frac{\mathrm{H}_2(x, y)}{|y - x|^{\alpha_2}} \qquad (0 < \alpha_1,\ \alpha_2 < 1)$$

les fonctions H_1 et H_2 étant continues (on pourrait naturellement se placer dans des hypothèses plus générales) pour $a \leq x, y \leq b$. La com-

(1) *Cf.* [14]-[16], [22].

position

$$\overset{0}{K}_1\overset{0}{K}_2=\int_a^b \frac{H_1(x,\xi)H_2(\xi,y)}{|\xi-x|^{\alpha_1}|y-\xi|^{\alpha_2}}d\xi$$

a évidemment un sens, et l'on a

$$\left|\overset{0}{K}_1\overset{0}{K}_2\right|\leqq M_1M_2\int_a^b \frac{d\xi}{|\xi-x|^{\alpha_1}|y-\xi|^{\alpha_2}},$$

M_1 et M_2 étant des bornes supérieures de $|H_1|$ et $|H_2|$.

On montre facilement que l'intégrale au second membre est bornée lorsque $\alpha_1+\alpha_2-1$ est négatif et qu'elle est inférieure à $\frac{N}{|y-x|^{\alpha_1+\alpha_2-1}}$, où N est un nombre fixe, lorsque $\alpha_1+\alpha_2-1$ est positif. Pour vérifier le premier point, on décomposera l'intégrale en trois parties concernant les intervalles partiels (a, x), (x, y), (y, b), si, par exemple $x<y$. D'autre part en prenant, pour nouvelle variable d'intégration,

$$\eta=\frac{y-\xi}{y-x},$$

on aura, pour $\alpha_1+\alpha_2-1>0$,

$$\int_a^b \frac{d\xi}{|\xi-x|^{\alpha_1}|y-\xi|^{\alpha_2}}<\frac{1}{|y-x|^{\alpha_1+\alpha_2-1}}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{d\eta}{|1-\eta|^{\alpha_1}\eta^{\alpha_2}},$$

la dernière intégrale ayant évidemment une valeur finie.

Itérons alors le noyau

$$K(x,y)=\frac{H(x,y)}{|y-x|^{\alpha}},$$

les puissances de composition successives $\overset{0}{K}{}^2$, $\overset{0}{K}{}^3$, ..., $\overset{0}{K}{}^n$, ... deviendront infinies pour $y=x$ comme

$$\frac{1}{(y-x)^{2\alpha-1}},\quad \frac{1}{(y-x)^{3\alpha-2}},\quad \ldots,\quad \frac{1}{(y-x)^{n\alpha-n+1}},\quad \ldots,$$

tant que l'exposant au dénominateur sera positif; dès que $n>\frac{1}{1-\alpha}$ le noyau itéré $\overset{0}{K}{}^n$ sera fini. En particulier pour $\alpha<\frac{1}{2}$, $\overset{0}{K}{}^2$ est borné.

11. Du point de vue des applications à la Physique mathématique il est important de donner le résultat analogue pour un noyau K(M, P) dépendant de deux points et défini dans une multiplicité $\mathfrak{V}$ de

l'espace considéré, ce noyau figurant dans une équation du type (4)

$$\varphi(M) - \lambda \int_{\mathcal{V}} K(M, P)\varphi(P)\,dP = f(M),$$

de sorte que son itération est définie par

$$\overset{0}{K}{}^2(M, P) = \int_{\mathcal{V}} K(M, H)K(H, P)\,dH, \qquad \ldots,$$

H étant un point qui décrit la multiplicité $\mathcal{V}$.

Admettons, pour fixer les idées, que la variété $\mathcal{V}$ soit un volume de l'espace à p dimensions, et que, en introduisant des coordonnées x_1, x_2, ..., x_p, ξ_1, ξ_2, ..., ξ_p des points M et P, l'élément d'intégration dP soit $d\xi_1\,d\xi_2\ldots d\xi_p$. Le résultat précédent prend la forme suivante :

Si le noyau K *est de forme*

$$K(M, P) = \frac{H(M, P)}{(\overline{MP})^\alpha} \qquad (0 < \alpha < p)$$

où H *est borné et où l'on pose*

$$MP = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + \ldots + (x_p - \xi_p)^2},$$

les noyaux itérés sont bornés à partir de $\overset{0}{K}{}^n$, *n étant le premier entier supérieur à* $\dfrac{1}{1 - \dfrac{\alpha}{p}}$.

III. — CAS SINGULIERS; INTÉGRALES PRISES EN VALEURS PRINCIPALES.

12. Il peut arriver que, pour un domaine d'intégration infinie ou pour certains types de noyaux non bornés, les résultats de Fredholm cessent d'être valables. On dira alors que l'équation intégrale est singulière.

Voici un exemple très simple. C'est celui de l'équation homogène,

$$(11) \qquad \varphi(x) - \lambda \int_0^\infty e^{-x\xi}\varphi(\xi)\,d\xi = 0 \qquad (x > 0).$$

Partons, pour en trouver des solutions, de la définition de la fonction eulérienne

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-s} s^{\alpha-1}\, ds \qquad (\alpha > 0),$$

en y posant $s = x\xi$, il vient

$$(12) \qquad x^{-\alpha}\,\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty e^{-x\xi}\xi^{\alpha-1}\, d\xi$$

et, en changeant α en $1-\alpha$, mais en supposant désormais $0 < \alpha < 1$.

$$(13) \qquad x^{\alpha-1}\,\Gamma(1-\alpha) = \int_0^\infty e^{-x\xi}\xi^{-\alpha}\, d\xi;$$

combinons les deux équations (12) et (13) en les multipliant respectivement par $\dfrac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha)}}$ et $\pm\dfrac{1}{\sqrt{\Gamma(1-\alpha)}}$ et en ajoutant, nous avons deux solutions particulières de (11)

$$x^{-\alpha}\sqrt{\Gamma(\alpha)} \pm \sqrt{\Gamma(1-\alpha)}\,x^{\alpha-1}$$

correspondant respectivement à

$$\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha)\Gamma(1-\alpha)}} = \pm\sqrt{\frac{\sin\pi\alpha}{\pi}},$$

d'après une propriété connue de la fonction Γ.

Les solutions obtenues peuvent être dites *solutions fondamentales* de (11) et les valeurs correspondantes de λ *valeurs fondamentales*. La marche suivie ne donne peut-être pas *toutes* les solutions fondamentales, mais elle permet déjà d'apercevoir une différence essentielle avec le cas de Fredholm : les valeurs fondamentales ne sont plus *isolées*, tout l'intervalle

$$-\frac{1}{\sqrt{\pi}} \leqq \lambda \leqq +\frac{1}{\sqrt{\pi}},$$

zéro étant exclus, donne des valeurs fondamentales.

Il peut d'ailleurs arriver qu'à une valeur fondamentale d'une équation singulière corresponde une infinité de solutions fondamentales. On vérifiera ainsi que l'équation (Weyl [134])

$$\varphi(x) - \lambda\int_0^\infty \sin(x\xi)\,\varphi(\xi)\, d\xi = 0$$

admet, pour $\lambda = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$, les solutions

$$\varphi(x) = \frac{x}{a^2 + x^2} + \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, e^{-ax},$$

où figure le paramètre a qui peut être pris arbitrairement (positif).

M. Picard, qui a envisagé nombre d'équations singulières intervenant dans des questions de Physique mathématique, a montré [82] que pour une équation non homogène la solution, considérée comme fonction de λ, ne sera plus méromorphe, mais présentera des singularités plus compliquées et qui dépendent d'ailleurs du second membre.

13. Équations de M. Picard. — M. Picard a étudié aussi [81] les équations du type (troisième espèce)

$$(14) \qquad A(x)\varphi(x) + \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi = f(x),$$

$A(x)$ ayant un certain nombre de racines simples sur l'intervalle (a, b). Nous résumerons rapidement quelques-uns des résultats qu'il a obtenus.

L'équation proposée peut s'écrire, en posant

$$A(x)\varphi(x) = \Phi(x),$$

$$(15) \qquad \Phi(x) + \lambda \int_a^b \frac{K(x, \xi)}{A(\xi)} \Phi(\xi)\, d\xi = f(x)$$

avec le noyau infini $\dfrac{K(x, y)}{A(y)}$.

Plaçons-nous dans le cas où $A(x)$ a la seule racine simple $x = x_0$ dans l'intervalle (a, b). M. Picard suppose les fonctions $A(x)$, $K(x, y)$, $f(x)$ holomorphes quand les variables qui y figurent restent dans une aire $\mathfrak{A}$ du plan complexe limitée par une courbe simple et renfermant le segment (a, b).

Ceci posé il supprime, dans l'intégrale $\int_a^b$ qui figure dans l'équation intégrale, la portion $\int_{x_0-\varepsilon}^{x_0+\eta}$. Les formules de Fredholm s'appliquent sans difficulté à l'équation ainsi modifiée et, en faisant tendre ε et η vers zéro de façon que leur rapport ait une limite, M. Picard démontre que la fonction $\Phi(x)$ a une limite, qui dépend, homographiquement,

de la constante

$$C = \lim \log \frac{\eta}{\varepsilon}.$$

Revenant à l'équation (14), le mode de calcul précédent donne une fonction $\varphi(x)$, qui dépend de C et admet en général x_0 comme pôle simple. Si le résidu correspondant est nul, on aura une solution de (14) continue sur le segment (a, b). Or la condition pour qu'il en soit ainsi se trouve être indépendante de C et s'exprime en annulant une certaine fonction entière de λ. Pour les valeurs correspondantes (14) a donc une solution continue, qui d'ailleurs ne dépend de C qu'en apparence.

14. Équations où figurent des valeurs principales d'intégrales. — Un facteur $\xi - x_0$ figurait au dénominateur, sous le signe d'intégration, dans l'équation précédente (15). La difficulté correspondante a été tournée par exclusion d'un intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \eta)$ du champ d'intégration.

Dans des cas analogues intervient souvent la notion, due à Cauchy, de valeur principale d'une intégrale divergente. Rappelons que, étant donnée une intégrale

$$\int_a^b f(\xi)\, d\xi$$

divergente parce que $f(\xi)$ devient infinie, d'ordre 1, pour $\xi = \xi_0$, sa valeur principale se définit par exclusion d'un intervalle $(\xi_0 - \varepsilon, \xi_0 + \varepsilon)$ symétrique par rapport au point singulier [1], puis en passant à la limite pour ε tendant vers zéro. Pour une intégrale multiple,

$$\int_{\mathfrak{V}} f(\mathrm{P})\, d\mathrm{P}$$

étendue à une variété à m dimensions [2] et concernant une fonction $f(\mathrm{P})$ qui devient infinie, pour $\mathrm{P} \equiv \mathrm{P}_0$, comme $\overline{\mathrm{PP}_0}^{-m}$, il faudra prendre pour domaines d'exclusion des hypersphères de l'espace auquel appartient la variété.

---

[1] Les intervalles d'exclusion sont donc moins généraux qu'au n° 13.

[2] $d\mathrm{P}$ désigne, comme plus haut, l'élément d'étendue de la variété $\mathfrak{V}$.

Des travaux récents fort importants (¹) concernent l'équation

$$(16) \qquad \varphi(M) - \lambda \int_{\mathcal{V}} K(M, P)\varphi(P)\,dP = f(M)$$

qui a formellement le type de Fredholm (*cf.* équation (4) de ce chapitre) *mais dans laquelle le symbole d'intégration représente une valeur principale*, le noyau $K(M, N)$, défini quand M et N sont des points quelconques de la variété $\mathcal{V}$, devenant infini comme $\overline{MN}^{-m}$ lorsque N tend vers M. Nous admettrons que ce noyau est continu tant que $N \neq M$ et qu'il peut se mettre sous forme d'une somme de deux fonctions, l'une (*partie irrégulière*) étant positivement homogène de degré $-m$ par rapport aux composantes du vecteur MN (²) et dépendant aussi, en général, du point M, l'autre (*partie régulière*) étant telle que son produit par $\overline{MN}^{m'}$ $(m' < m)$ reste bornée. Si cette seconde partie existait seule, il n'y aurait aucune difficulté, puisque les noyaux itérés de K seraient bornés à partir de l'un d'eux $\overset{0}{K}{}^{n}$ (*cf.* n° 11). On doit enfin supposer que $f(M)$ satisfait une condition de Hölder, c'est-à-dire qu'il existe un exposant α $(0 < \alpha \leq 1)$ et un nombre h positif tels que

$$|f(M) - f(N)| < h\,\overline{MN}^{\alpha}$$

quels que soient M et N sur $\mathcal{V}$ (³).

15. Étant donné un second noyau $L(M, N)$ présentant une singularité analogue à $K(M, N)$, on peut définir une composition (généralisée)

$$\overset{0}{L}\overset{0}{K}(M, N) = \int_{\mathcal{V}} L(M, P)K(P, N)\,dP,$$

l'intégrale étant prise en valeur principale par exclusion d'hyper-

---

(¹) Le cas d'une intégrale simple a été envisagé par POINCARÉ, [86] (*cf.* aussi G. BERTRAND, [6]), par M. VILLAT, [119] et M. CARLEMAN, [16]. Le cas d'une intégrale double a été étudié par M. TRICOMI, [109] et, indépendamment, par M. GIRAUD, [32, 33] à qui l'on doit la théorie générale complète.

(²) Ou par rapport à des coordonnées générales fixant la position de N quand M est connu et prenant les valeurs zéro quand N vient en M.

(³) Nous n'avons donné dans le texte, et de façon très sommaire, que les principales conditions posées par M. Giraud. Pour plus de détails le lecteur se reportera aux mémoires cités.

sphères de centres M et N et dont les rayons tendent indépendamment vers zéro.

Une première question concerne la nature de la singularité de $\overset{0}{L}\overset{0}{K}$. On vérifie que, dans le cas d'une intégrale simple (variété $\mathcal{V}$ à une dimension) le noyau $\overset{0}{K}\overset{0}{L}$ est intégrable. Dans le cas d'une intégrale multiple (variété $\mathcal{V}$ à plus d'une dimension) $\overset{0}{L}\overset{0}{K}$ n'est pas intégrable et donne, comme L et K, des intégrales à valeurs principales.

La composition (généralisée) qui vient d'être introduite n'est pas associative : en composant, par exemple, une fonction $f(M)$ par K, puis par L, on aura, en général

$$[\overset{0}{L}(\overset{0}{K}f)] \neq (\overset{0}{L}\overset{0}{K})f$$

et il est essentiel, pour la suite, d'évaluer la différence

$$\Delta = (\overset{0}{L}\overset{0}{K})f - \overset{0}{L}(\overset{0}{K}f),$$

c'est-à-dire

$$(17)\qquad \Delta = \int_{\mathcal{V}} \overset{0}{L}\overset{0}{K}(M, P) f(P)\,dP - \int_{\mathcal{V}} L(M, P)\,dP \int_{\mathcal{V}} K(P, Q) f(Q)\,dQ,$$

ce qui revient en fait à établir une règle pour modifier l'ordre de deux signes d'intégration pris en valeurs principales.

Pour le cas d'intégrales simples, on établit sous des conditions très larges, la formule

$$\int_a^b \frac{d\xi}{(x-\xi)} \int_a^b \frac{F(x, \xi, \eta)}{(\xi-\eta)}\,d\eta = \int_a^b d\eta \int_a^b F(x, \xi, \eta)\frac{d\xi}{(x-\xi)(\xi-\eta)} - \pi^2 F(x, x, x),$$

due à Poincaré (*cf.* [86] et [6]). Il en suit que, quand $\mathcal{V}$ est une courbe et si les noyaux K et L ont pour parties irrégulières

$$\frac{k(x)}{x-y} \quad \text{et} \quad \frac{l(x)}{x-y}$$

(où x et y sont les valeurs de l'arc fixant les positions de M et N), on a

$$(18)\qquad \Delta = \pi^2\, l(x)\, k(x) . f(P).$$

M. Tricomi a traité le cas d'une intégrale double avec des noyaux

K et L dont les parties irrégulières sont de forme

$$\frac{u(\theta)}{\mathrm{MN}^2}, \quad \frac{v(\theta)}{\mathrm{MN}},$$

θ étant l'angle de MN avec une direction fixe. Il montre que

$$\Delta = 2\pi \int_0^{2\pi} u(\theta)\, v(\theta + \pi)\, d\theta\, f(\mathrm{P}) \tag{19}$$

Dans le cas d'une intégrale multiple on a

$$\Delta = \mathrm{A}(\mathrm{P})\, f(\mathrm{P}), \tag{20}$$

A(P) étant une fonction du point P qui ne dépend que des parties irrégulières de L et K ([1]).

16. Après ces préliminaires abordons l'étude d'une équation du type (16). Prenons d'abord le cas où $\mathfrak{V}$ est une courbe, l'équation s'écrira

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\mathfrak{V}} \mathrm{K}(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = f(x), \tag{21}$$

le noyau $\mathrm{K}(x, y)$ ayant la partie irrégulière $\dfrac{k(x)}{x - y}$ (les points M, N, P, ..., sont repérés par les valeurs correspondantes de l'arc $x, y, \xi, \ldots$). D'après le numéro précédent le noyau itéré $\overset{0}{\mathrm{K}}{}^2$ n'a plus de partie irrégulière et l'on pourra se ramener (*cf.* fin du n° 8) à une équation de Fredholm dont le noyau est $\overset{0}{\mathrm{K}}{}^2$: il suffit d'ajouter à (21) cette même équation dont les deux membres ont été composés par K et multipliés par λ. Compte tenu de (18) il vient ainsi

$$\varphi(x)\{1 + \lambda^2\pi^2 k^2(x)\} - \lambda^2 \int_{\mathfrak{V}} \overset{0}{\mathrm{K}}{}^2(x, \xi)\, \varphi(\xi)\, d\xi = f(x) + \lambda \int_{\mathfrak{V}} \mathrm{K}(x, \xi)\, f(\xi)\, d\xi. \tag{22}$$

Si $1 + \lambda^2\pi^2 k^2(x)$ ne s'annule pas, c'est une équation ordinaire de Fredholm pour laquelle les itérés du noyau sont bornés à partir de l'un d'eux et d'où l'on tirera $\varphi(x)$.

([1]) GIRAUD, [32]. La fonction A(P) reste la même lorsque, modifiant l'ordre des compositions, on envisage la différence $\left(\overset{0}{\mathrm{K}}\overset{0}{\mathrm{L}}\right)\overset{0}{f} - \overset{0}{\mathrm{K}}\left(\overset{0}{\mathrm{L}}\overset{0}{f}\right)$ ou, en composant à droite de f (fonction de N), $\overset{0}{f}\left(\overset{0}{\mathrm{K}}\overset{0}{\mathrm{L}}\right) - \left(\overset{0}{f}\overset{0}{\mathrm{K}}\right)\overset{0}{\mathrm{L}}$.

Remarquons que le calcul précédent prouve seulement que toute solution de (21) vérifie (22). Mais l'équivalence de ces deux équations est évidente toutes les fois que l'équation homogène correspondante à (22) a pour seule solution zéro. Posant en effet

$$\varphi(x) - \lambda \int_{\mathcal{D}} K(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi - f(x) = \Phi(x),$$

l'équation (22) s'écrit

$$\Phi(x) + \lambda \int_{\mathcal{D}} K(x, \xi)\Phi(\xi)\, d\xi = 0,$$

d'où résulte sans peine que $\Phi(x)$ doit être solution de l'équation obtenue en annulant le premier membre de (22).

17. Prenons par exemple l'un des noyaux de M. Villat

$$K(x, y) = \frac{1}{2\pi}\cot\frac{x-y}{2} \qquad (0 \leqq x \leqq 2\pi \quad 0 \leqq y \leqq 2\pi);$$

un calcul très simple donne

$$\overset{0}{K}{}^2 = \frac{1}{2\pi},$$

de sorte que (22) s'écrit, en abrégeant le second membre,

$$\varphi(x)(1+\lambda^2) - \frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\xi)\, d\xi = F(x),$$

d'où

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{1+\lambda^2} + \text{const}.$$

La valeur de la constante s'obtient par substitution, elle est égale à

$$\frac{\lambda^2}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\xi)\, d\xi.$$

Il convient de remarquer que la méthode s'applique même à une équation de première espèce. Prenons l'équation, traitée par M. Villat,

$$(21') \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cot g\frac{x-\xi}{2}\,\varphi(\xi)\, d\xi = f(x),$$

d'où, en composant par le noyau, on déduit

$$(22') \qquad -\varphi(x) + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{x-\xi}{2} f(\xi)\,d\xi.$$

Toute solution de (21′) satisfait (22′) et est donc de forme

$$(23) \qquad \varphi(x) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{x-\xi}{2} f(\xi)\,d\xi + \text{const.}$$

En portant cette expression dans (21′) il vient

$$\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi = 0.$$

Si cette condition n'est pas remplie (21′) n'a pas de solution, mais

$$(21'') \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{cotg}\frac{x-\xi}{2}\,\varphi(\xi)\,d\xi = f(x) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\xi)\,d\xi$$

aura pour solution générale (23).

18. La méthode qui vient d'être appliquée au cas d'une intégrale simple est en défaut pour les intégrales multiples parce que le noyau $\overset{0}{K}{}^2$ a une partie irrégulière.

Pour traiter, en suivant la méthode de M. Giraud, l'équation générale (16), composons cette équation par un nouveau noyau $L(M, N; \lambda)$, dont le choix sera précisé ultérieurement. En multipliant l'équation ainsi obtenue par λ et en l'ajoutant à (16), il vient d'après (20),

$$(24) \qquad \varphi(M)\{1 + \lambda^2 A(M;\lambda)\} - \lambda\int_{\mathcal{V}} T(M, P; \lambda)\,\varphi(P)\,dP$$
$$= f(M) + \lambda\int_{\mathcal{V}} L(M, P; \lambda)\,f(P)\,dP$$

avec le noyau

$$T(M, N; \lambda) = K - L + \lambda \overset{0}{L}\overset{0}{K}.$$

Par une analyse très profonde, M. Giraud a pu établir l'*existence d'un noyau* L tel que $T(M, P; \lambda)$ *n'ait plus de partie irrégulière*. Toute solution de (16) vérifie (24) qui est une équation de Fredholm ordinaire, du moins pour les valeurs de λ telles que

$$\{1 + \lambda^2 A(M;\lambda)\}$$

ne s'annule pas. Cette dernière condition conduit à exclure certaines coupures C tracées dans le plan complexe λ.

Prenons λ en dehors de ces coupures, la résolution de (24) donne, pour $\varphi(M)$, une expression de forme

$$(25) \qquad \varphi(M) = \frac{f(M)}{1 + \lambda^2 A(M; \lambda)} - \lambda \int_{\mathfrak{V}} \Theta(M, P; \lambda) f(P)\, dP$$

où l'intégrale doit être prise en valeur principale; $\Theta(M, P; \lambda)$ tient le rôle de noyau résolvant, c'est une fonction méromorphe de λ (en dehors des coupures) dont les pôles se trouvent être indépendants de M et P. On démontre que (25) donne bien la solution, unique, de l'équation proposée (16), sauf pour des valeurs isolées de λ.

On obtient d'ailleurs pour le noyau $\Theta(M, P; \lambda)$ une identité analogue à celle qui a été établie au Chapitre VIII [n° **22**, formule (33)] pour les noyaux résolvants de Fredholm. Il en résulte aisément que lorsque λ (toujours extérieur aux coupures C) est un pôle de Θ, l'équation homogène correspondante à (16) admet au moins une solution non nulle; sa solution générale satisfait d'ailleurs l'équation homogène déduite de (24) et s'exprime donc comme combinaison linéaire d'un nombre fini de *solutions fondamentales;* de même pour l'équation associée.

On a ainsi tous les éléments permettant d'étendre aux équations envisagées les résultats de Fredholm (Chap. VIII, § I et II).

Nous n'avons pu donner qu'une idée sommaire des beaux travaux de M. Giraud. On voit combien ces travaux élargissent le champ d'application des théories exposées au Chapitre VIII.

CHAPITRE X.

NOYAUX SPÉCIAUX. SUITES ORTHOGONALES ET BIORTHOGONALES. L'ÉQUATION DE FREDHOLM DE PREMIÈRE ESPÈCE.

I. — LES FONCTIONS FONDAMENTALES D'UN NOYAU SYMÉTRIQUE.

1. Un cas particulier notable, et pour lequel les résultats du Chapitre VIII peuvent être beaucoup prolongés est celui des noyaux symétriques envisagés d'abord par Hilbert, Schmidt et leurs élèves (¹).

Un noyau sera dit *symétrique* si l'on a identiquement

$$K(x, y) = K(y, x).$$

Une équation de Fredholm à noyau symétrique se présente alors comme généralisant, dans l'espace fonctionnel, un système d'équations linéaires à coefficients symétriques

$$\sum_{k}^{n} a_{ik} x_k = y_k \qquad \text{avec } a_{ik} = a_{ki}.$$

On sait que de telles équations interviennent dans le problème de la réduction d'une forme quadratique

$$\sum_{ik} a_{ik} x_i x_k.$$

Dans le domaine fonctionnel l'extension la plus simple de la forme quadratique est donnée, comme nous l'avons déjà vu (Chap. III, n° 12) par l'expression

$$\int_a^b \int_a^b K(x, y)\, \varphi(x)\, \varphi(y)\, dx\, dy,$$

(¹) *Cf.* [42], [103].

où le noyau K peut toujours être supposé symétrique. C'est l'étude de telles formes fonctionnelles quadratiques qui a conduit M. Hilbert à ses résultats, obtenus par passage du discontinu au continu.

2. Un premier groupe de résultats concerne les *valeurs caractéristiques*. Les noyaux considérés seront, essentiellement, supposés réels.

Théorème I. — *Il existe certainement au moins une valeur caractéristique.*

Dans le cas contraire toutes les traces, à partir de la troisième seraient nulles (*cf.* Chap. VIII, n° 22). Or la quatrième trace peut s'écrire, à cause de la symétrie

$$\int_a^b \int_a^b \left[\overset{0}{K}{}^2(x, y) \right]^2 dx\, dy,$$

et elle n'est sûrement pas nulle parce que $\overset{0}{K}{}^2$ ne peut être identiquement nul : pour $y = x$, $\overset{0}{K}{}^2$ se réduit en effet à

$$\int_a^b [K(x, \xi)]^2 d\xi.$$

(Le théorème serait en défaut pour certains noyaux discontinus, d'ailleurs sans intérêt.)

Théorème II. — *Les valeurs caractéristiques sont nécessairement réelles.*

Soit en effet $\lambda = \mu + i\nu$ une valeur caractéristique complexe. Une fonction fondamentale étant $\varphi(x) = \varphi'(x) + i\varphi''(x)$, elle sera sa propre associée (¹) et le noyau K, étant réel, admettra la valeur caractéristique $\lambda - i\mu$ avec la solution fondamentale $\bar{\varphi}(x) = \varphi'(x) - i\varphi''(x)$ qui coïncide également avec son associé.

Dans ces conditions les deux fonctions $\varphi(x)$ et $\bar{\varphi}(x)$ devraient être

(¹) Dans le cas symétrique l'équation de Fredholm est identique à son associée et les fonctions fondamentales sont les mêmes.

orthogonales (Chap. VIII, n° 39, note) ce qui entraînerait

$$\int_a^b \{\varphi'^2(x) + \varphi''^2(x)\}\, dx = 0,$$

ce qui est évidemment impossible.

3. Il en résulte immédiatement (Chap. VIII, n° 38) que *tous les pôles du noyau résolvant sont simples*. En effet une fonction fondamentale $\varphi(x)$ appartient à l'équation associée et l'intégrale

$$\int_a^b \varphi(x)\varphi(x)\, dx$$

est différente de zéro.

On est donc dans le cas déjà étudié au n° 37 du Chapitre VIII. Tout noyau canonique d'un noyau symétrique sera de forme

$$\varphi(x)\varphi(y)$$

si, conformément aux notations du n° 37, on choisit la fonction fondamentale telle que

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2\, dx = \frac{1}{c}.$$

Si, comme nous le ferons désormais, nous modifions $\varphi(x)$ d'un facteur constant de manière à assurer

$$\int_a^b |\varphi(x)|^2\, dx = 1$$

[on dit alors que $\varphi(x)$ est *normalisée*] le noyau canonique s'écrira

$$\frac{\varphi(x)\varphi(y)}{c}.$$

Admettons alors qu'il n'y ait qu'un nombre fini de valeurs fondamentales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ avec les fonctions fondamentales (normalisées)

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_p(x),$$

le noyau K peut s'écrire, d'après les résultats du Chapitre VIII, n° 30,

$$\frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1} + \frac{\varphi_2(x)\varphi_2(y)}{\lambda_2} + \ldots + \frac{\varphi_p(x)\varphi_p(y)}{\lambda_p} + H(x, y).$$

et $H(x, y)$ étant symétrique et n'ayant aucune valeur fondamentale est identiquement nul. On a nécessairement

$$K(x, y) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1} + \ldots + \frac{\varphi_p(x)\varphi_p(y)}{\lambda_p}.$$

Il pourra y avoir une infinité de valeurs fondamentales $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_i, \ldots$ auxquelles correspondent des fonctions fondamentales

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_i(x), \quad \ldots$$

vérifiant les conditions

$$\int_a^b \varphi_i(\xi)\varphi_k(\xi)\,d\xi = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

Dans ce cas si la série

$$\frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1} + \ldots + \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i} + \ldots$$

est absolument et uniformément convergente elle représente le noyau $K(x, y)$.

Dans l'un ou l'autre des cas précédents (nombre fini ou infini de valeurs fondamentales) il peut arriver que la même valeur λ_i figure plusieurs fois dans le développement : cela se produira si pour cette valeur il y a plusieurs fonctions fondamentales, donc plusieurs noyaux canoniques.

II. — LA NOTION DE SUITE ORTHOGONALE. DÉVELOPPEMENTS EN SÉRIE DU TYPE DE FOURIER.

4. Nous adoptons la notation $\overline{fg}$ pour désigner l'intégrale

$$I = \int_a^b f(x)\,g(x)\,dx,$$

intégrale qui est nulle quand f et g sont orthogonales. Au Chapitre VIII il a été commode de noter l'intégrale I comme produit de composition. Ici au contraire la notation qui vient d'être indiquée sera préférable.

5. **Définitions.** — Soit une suite, finie ou infinie, de fonctions

données dans l'intervalle (a, b)

(1) $$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots.$$

Pour se placer dans le cas le plus général, ces fonctions seront supposées sommables et de carré sommable. Nous supposerons qu'aucune d'elles n'est nulle, étant entendu, suivant la convention faite au Chapitre II (n° 36) que nous considérons comme nulle une fonction qui ne diffère de zéro qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle.

La suite (1) *sera dite orthogonale si*

$$\overline{\varphi_i \varphi_k} = 0 \qquad (i \neq k);$$

$\overline{\varphi_i \varphi_i}$ est, d'après l'hypothèse faite, toujours différent de zéro et l'on pourra donc, en divisant au besoin φ_i par $\sqrt{\overline{\varphi_i \varphi_i}}$ se ramener au cas où $\overline{\varphi_i \varphi_i} = 1$; *la suite* (1) *est dite alors orthogonale et normale.*

6. *Propriétés. a. Les fonctions d'une suite orthogonale sont linéairement distinctes.*

S'il y avait une relation

$$C_1 \varphi_1 + \ldots + C_n \varphi_n = 0,$$

on en tirerait

$$C_1 \overline{\varphi_1 \varphi_i} + \ldots + C_n \overline{\varphi_n \varphi_i} = 0,$$

d'où $C_i = 0$; toutes les constantes C_i seraient donc nulles.

b. Une suite quelconque $u_1(x)$, $u_2(x)$, … peut, par combinaison linéaire des fonctions qui y figurent, être remplacée par une suite orthogonale.

On prendra $\varphi_1(x) = u_1(x)$ et l'on remplacera chacune des fonctions suivantes u_i par $u'_i = u_i - c_i \varphi_1$ en choisissant les c_i de façon que

$$\overline{\varphi_1 u'_i} = 0.$$

On prendra alors pour φ_2 la première fonction u'_i non nulle et l'on modifiera les suivantes, comme plus haut, de façon à les rendre orthogonales à φ_2 et ainsi de suite.

7. D'après le paragraphe I tout noyau symétrique donne un sys-

tème orthogonal, celui des fonctions fondamentales. Inversement d'ailleurs, prenons arbitrairement le système orthogonal (1), que nous supposerons normalisé et des constantes λ_i telles que la série

$$(2) \qquad \sum_1 {}_i \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i}$$

soit absolument et uniformément convergente. Cette série définit un noyau $K(x, y)$ dont les puissances de composition seront évidemment

$$(3) \qquad \overset{0}{K}{}^n(x, y) = \sum_i \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i^n}$$

et dont le noyau résolvant sera

$$(4) \qquad \Gamma(x, y; \lambda) = -\left\{ K + \lambda \overset{0}{K}{}^2 + \ldots + \lambda^{n-1}\overset{0}{K}{}^n + \ldots \right\},$$

d'où

$$(4') \qquad \Gamma(x, y; \lambda) = -\sum_i \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i - \lambda}.$$

L'hypothèse faite sur la série (2) entraîne nécessairement que λ_i augmente indéfiniment avec i, de sorte que (3) et (4) sont de même absolument et uniformément convergentes.

8. Développement en série suivant des fonctions orthogonales. — Soit une suite orthogonale

$$(1) \qquad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots,$$

que nous supposerons normalisée. Étant donnée une fonction quelconque $f(x)$, proposons-nous de rechercher si elle admet un développement en série

$$(5) \qquad f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots,$$

les c_n étant des constantes convenablement choisies. C'est là un problème qui généralise le développement en série trigonométrique lequel correspond au cas où, l'intervalle (a, b) étant, par exemple, pris égal à $(0, 2\pi)$, les fonctions de la suite (1) seraient

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \quad \ldots, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin n\pi, \quad \ldots.$$

Si la série (5) est uniformément convergente et la fonction $f(x)$

sommable et de carré sommable, on tire évidemment de (5) les valeurs nécessaires des coefficients c_i

$$c_i = \int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\,dx; \tag{6}$$

il suffit de multiplier (5) par $\varphi_i(x)$ et d'intégrer.

Ces constantes c_i, que l'on peut toujours définir par les formules (6), sont dites *constantes de Fourier* de la fonction $f(x)$ et le développement (5), même s'il ne converge pas vers $f(x)$, est dit *développement de Fourier* de $f(x)$ [relatif au système orthogonal (1)].

Les constantes de Fourier vérifient une inégalité importante que l'on obtient en développant l'intégrale

$$\int_a^b [f(x) - c_1\varphi_1(x) - \ldots - c_n\varphi_n(x)]^2\,dx,$$

qui est positive ou nulle. En tenant compte des relations

$$\overline{\varphi_i\varphi_k} = 0 \quad (i \neq k), \qquad \overline{\varphi_i\varphi_i} = 1,$$

il vient

$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_n^2 \leqq \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx, \tag{7}$$

c'est *l'inégalité de Bessel*. Il en résulte évidemment que la série $\Sigma_i c_i^2$ est convergente, sa somme étant au plus égale à

$$\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx.$$

9. Interprétation géométrique dans l'espace fonctionnel. — Avant d'aller plus loin il n'est pas inutile d'indiquer à quoi correspond, dans un espace à un nombre fini de dimensions, le problème *fonctionnel* du développement en série de Fourier.

Prenons, dans un espace (E_n) à n dimensions, une origine et les vecteurs joignant à l'origine p points M_1, M_2, ..., M_p. Tout vecteur

$$c_1\overrightarrow{OM}_1 + \ldots + c_p\overrightarrow{OM}_p$$

définit un point N et, lorsqu'on fait varier arbitrairement les scalaires c_i ce point engendre une multiplicité linéaire de (E_n), multi-

plicité à p dimensions si les vecteurs $\overrightarrow{OM_i}$ sont linéairement distincts (on peut toujours s'y ramener). Les c_i donnent des coordonnées cartésiennes du point N dans la multiplicité considérée quand on y prend pour système de base les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, ..., $\overrightarrow{OM_p}$.

Une fonction quelconque $u(x)$ peut être considérée comme définissant un « point » de l'espace fonctionnel et, une suite de tels « points » étant donnée,

$$u_1(x), \quad u_2(x), \quad \ldots,$$

les séries

$$c_1 u_1(x) + c_2 u_2(x) + \ldots,$$

où les nombres c_i sont arbitraires (sous quelques réserves destinées à assurer la convergence) définissent, dans l'espace fonctionnel, une multiplicité linéaire qui aura, en général, une infinité de dimensions. L'expression déjà considérée

$$\overline{u_i u_k} = \int_a^b u_i(x)\, u_k(x)\, dx$$

correspond, par le passage du discontinu au continu, au produit scalaire $\overrightarrow{OM_i} \cdot \overrightarrow{OM_k}$ de sorte que le résultat b du n° 6 n'est que l'extension à l'espace fonctionnel d'une propriété géométrique connue : on peut prendre, pour système base d'une multiplicité linéaire un système de vecteurs $\overrightarrow{OM_i}$ orthogonaux deux à deux et unitaires.

10. Mais on peut aller plus loin. Soit, dans l'espace (E_n), un système de base formé de vecteurs orthogonaux et unitaires $\overrightarrow{OM_1}$, $\overrightarrow{OM_2}$, ..., $\overrightarrow{OM_p}$. Pour tout vecteur $\overrightarrow{ON}$ de la multiplicité linéaire correspondante on a l'égalité

$$c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_p^2 = \overline{ON}^2.$$

Pour un vecteur n'appartenant pas à cette multiplicité on peut de même définir les c_i,

$$c_i = \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM_i},$$

mais on aura

$$c_1^2 + \ldots + c_p^2 < \overline{ON}^2,$$

inégalité analogue à celle de Bessel. Si $p = n$ on a toujours l'égalité.

Revenant enfin à l'espace fonctionnel dans lequel on définit une multiplicité linéaire par le système de base (1) orthogonal et normal [1], les fonctions développables en série du type (5) appartiennent à cette multiplicité. Les remarques précédentes concernant l'espace (E_n) conduisent à détacher la notion de système *orthogonal et normal complet : le système* (1) *sera dit complet s'il jouit de la propriété que, pour toute fonction* $f(x)$ *de coefficients de Fourier* c_i, *on ait l'égalité*

$$(7') \qquad \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx = c_1^2 + c_2^2 + \ldots + c_i^2 + \ldots.$$

Elles font d'ailleurs prévoir que, le système orthogonal étant complet ou non, toute fonction $f(x)$ dont les constantes de Fourier vérifient (7') doit pouvoir être représentée par son développement de Fourier.

11. Pour justifier de la façon la plus complète le résultat ainsi prévu et pour établir, de la façon la plus satisfaisante, une théorie complète des développements du type de Fourier, il faut se placer dans le champ ($\mathcal{H}$) des fonctions mesurables et de carré sommable [2]. On a alors le théorème fondamental suivant :

Soit la fonction $f(x)$ *du champ* ($\mathcal{H}$) *qui donne les constantes de Fourier* c_i; *si l'on a l'égalité* (7'), *la série*

$$c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_i\varphi_i(x) + \ldots$$

converge en moyenne vers $f(x)$ *et définit donc cette fonction aussi bien qu'elle peut l'être dans le champ* $\mathcal{H}$, *c'est-à-dire abstraction faite des valeurs aux points d'un ensemble de mesure nulle.*

Posons pour un instant

$$f_n(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

on a (*cf.* n° 8)

$$\int_a^b [f(x) - f_n(x)]^2\,dx = \int_a^b \{f(x)\}^2\,dx - c_1^2 - c_2^2 - \ldots - c_n^2;$$

---

(1) Espace hilbertien (*cf.* Chap. I, § IV).

(2) *Cf.* Chap. II, § V.

mais, d'après (7'), le second membre tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$, donc aussi le premier et le théorème est établi. On a déjà vu au Chapitre II qu'une suite convergente en moyenne ne peut définir sa fonction « limite » que presque partout.

On voit que l'on a le droit d'écrire

$$(5) \qquad f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots,$$

étant entendu qu'il n'y a convergence qu'en moyenne.

Comme corollaire immédiat :

Si le système (1) *est complet, toute fonction* $f(x)$ *du champ* $\mathcal{H}$ *est représentée par une série* $c_1\varphi_1(x) + \ldots$ *qui converge vers* $f(x)$ *en moyenne.*

La dénomination introduite plus haut de *système orthogonal complet* se justifie d'ailleurs par l'énoncé suivant [1] :

Pour qu'un système orthogonal soit complet, il est nécessaire et suffisant que toute fonction du champ ($\mathcal{H}$) ***orthogonale aux*** φ_i ***soit nulle*** (*sauf, éventuellement, sur un ensemble de mesure nulle*).

La condition est évidemment nécessaire, car si elle n'était pas remplie on pourrait trouver une $F(x)$ vérifiant $\overline{FF} = 1$ et $\overline{\varphi_i F} = 0$ ($i = 1, 2, \ldots$), fonction ayant donc toutes ses constantes de Fourier nulles. L'égalité (7') ne serait pas satisfaite pour cette fonction.

La condition est suffisante. Supposons en effet qu'il existe une fonction $f_0(x)$ ayant des constantes de Fourier c_i telles qu'on ait l'*inégalité*

$$\int_a^b \{f_0(x)\}^2\,dx > c_1^2 + c_2^2 + \ldots.$$

Nous verrons au n^{o} suivant qu'on peut toujours trouver une fonction $f(x)$ ayant les mêmes constantes de Fourier que $f_0(x)$ et vérifiant l'égalité (7'). La différence $f(x) - f_0(x)$ serait alors non nulle et pourtant orthogonale à toutes les φ_i, ce qui contredit la condition en question.

12. Dans l'ordre d'idées qui nous occupe, une dernière question se

(1) *Cf.* Lauricella, [56].

pose. Peut-on prendre arbitrairement les constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n, \ldots$ (telles évidemment que la série $\Sigma_i c_i^2$ soit convergente) et existe-t-il une fonction $f(x)$ du champ $(\mathcal{H})$ les admettant comme constantes de Fourier?

La réponse est affirmative ([1]). *Que le système des φ_i soit ou non complet*, les fonctions f_n, définies par $f_n = c_1\varphi_1 + \ldots + c_n\varphi_n$, sont telles que

$$\int_a^b (f_n - f_m)^2\,dx = c_{m+1}^2 + c_{m+2}^2 + \ldots + c_n^2 \qquad (n > m)$$

tende vers zéro quand m et n tendent vers l'infini. La suite des fonctions f_n est donc *convergente en moyenne vers une certaine fonction* $f(x)$ (Chap. II, n° 39). Cette fonction $f(x)$ donne pour coefficients de Fourier les nombres c_i dont on est parti, car s'ils étaient différents et égaux à c'_i on aurait, comme le montre un calcul facile,

$$\int_a^b \{f(x) - f_n(x)\}^2\,dx = \left\{ \int_a^b f^2(x)\,dx - \sum_1^n c_i'^2 \right\} + \Sigma_i (c'_i - c_i)^2;$$

le second membre tend vers zéro avec n et il est formé de deux parties positives; donc

$$c_i = c'_i$$

et

$$\int_a^b \{f(x)\}^2\,dx = \sum_1^\infty {}_i c_i^2.$$

La différence entre le cas d'un système φ_i complet et celui d'un système φ_i non complet est la suivante : dans le premier cas la fonction définie par la suite des c_i est unique (sous la réserve habituelle), dans le second cas on peut ajouter à f toute fonction F orthogonale à tous les φ_i.

13. Retour aux noyaux symétriques. — Tout système orthogonal

$$(1) \qquad \varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots$$

normalisé peut, nous l'avons déjà vu, être rattaché, d'une infinité de façons, à un noyau symétrique.

([1]) Cet important résultat a été établi, indépendamment, par M. F. Riesz, [94] et M. E. Fischer, [29]. Il est connu sous le nom de *Théorème de Fischer-Riesz*.

Donnons-nous *a priori* un tel noyau $K(x, y)$ et supposons que (1) soit la suite de ses fonctions fondamentales. Les propriétés précédentes vont se relier à des propriétés intéressant le noyau.

Si, d'abord, on cherche à développer le noyau, considéré comme fonction de x, suivant les fonctions $\varphi_i(x)$, on a, pour coefficient de $\varphi_i(x)$,

$$\int_a^b K(x, y)\,\varphi_i(x)\,dx = \frac{\varphi_i(y)}{\lambda_i},$$

de sorte que l'on retombe sur la série déjà envisagée

$$\sum_i \frac{\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)}{\lambda_i},$$

dont on peut seulement, de ce qui précède, affirmer la convergence en moyenne. Il est important de noter que la série des carrés des coefficients

$$\sum_i \frac{\{\varphi_i(y)\}^2}{\lambda_i^2}$$

est convergente.

14. Le résultat donné plus haut (n° 11) sur le développement d'une fonction $f(x)$ se précise pour les fonctions particulières qui sont susceptibles de se mettre sous la forme

$$f(x) = \int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds, \tag{8}$$

$h(x)$ étant une nouvelle fonction du champ ($\mathcal{H}$). Démontrons que :

Théorème de Hilbert [1]. — *Toute fonction continue et de la forme* (8) *est développable en une série uniformément convergente des fonctions fondamentales* (1) *du noyau* K.

Il n'est pas besoin, dans la démonstration, de supposer le noyau K borné, mais il faut admettre que l'intégrale

$$\int_a^b \{K(x, y)\}^2\,dy$$

est bornée par un nombre que nous désignons par A.

---

(1) *Cf.* Hilbert, [42].

Les constantes de Fourier e_i de la fonction $h(x)$ sont évidemment liées à celles c_i de $f(x)$ par

$$c_i = \frac{e_i}{\lambda_i}.$$

Il s'en suit que la série de Fourier de $f(x)$ est uniformément convergente. En effet,

$$\left|\sum_n^m {}_i c_i \varphi_i(x)\right| = \left|\sum_n^m {}_i e_i \frac{\varphi_i(x)}{\lambda_i}\right| < \sqrt{\sum_n^m {}_i e_i^2 \sum_n^m {}_i \frac{\{\varphi_i(x)\}^2}{\lambda_i^2}};$$

d'après l'inégalité de Bessel,

$$\sum_n^m {}_i \frac{\{\varphi_i(x)\}^2}{\lambda_i^2} \leqq \int_a^b K^2(x, s)\, ds < A,$$

quels que soient m et n et, la série des e_i^2 étant convergente, $\sum_n^m {}_i e_i^2$ peut être rendu arbitrairement petit si m et n sont supérieurs à N assez grand. D'où le résultat.

La série uniformément convergente

$$c_1 \varphi_1(x) + \ldots + c_n \varphi_n(x) + \ldots$$

a donc une somme $S(x)$ fonction continue. Mais nécessairement

$$f(x) \equiv S(x),$$

car, en désignant par $R(x)$ la différence, on vérifie

$$\int \{R(x)\}^2\, dx = 0,$$

ce qui, à cause de la continuité, entraîne que $R(x)$ soit nul.

15. Ce théorème s'applique en particulier aux noyaux itérés de K. Le noyau $\overset{0}{K}{}^2$, où l'on considère, pour un moment, y comme paramètre, s'écrit

$$\overset{0}{K}{}^2 = \int_a^b K(x, s)\, K(s, y)\, ds,$$

et il a la forme (8) avec $h(s) = K(s, y)$; un calcul facile donne les

coefficients de Fourier $\frac{\varphi_n(y)}{\lambda_n^2}$, de sorte que

$$\overset{0}{K}{}^2 = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^2} + \ldots + \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i^2} + \ldots,$$

la série étant uniformément convergente en x si l'on fixe y, donc aussi en y, si l'on fixe x (¹). De même on a les développements analogues

$$\overset{0}{K}{}^n(x, y) = \frac{\varphi_1(x)\varphi_1(y)}{\lambda_1^n} + \ldots + \frac{\varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i^n} + \ldots.$$

On aura aussi un développement uniformément convergent du noyau résolvant Γ pourvu que l'on y isole K(x, y). Partant des précédentes (4) (4′) on aura

$$(9) \qquad \Gamma(x, y; \lambda) = -K(x, y) - \sum_i \frac{\lambda \varphi_i(x)\varphi_i(y)}{\lambda_i(\lambda_i - \lambda)}.$$

16. Noyau fermé. — *Le noyau symétrique* K(x, y) *sera dit fermé s'il n'existe aucune fonction $h(s)$ telle que*

$$(10) \qquad \int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds = 0$$

(*presque partout*).

Il est équivalent de dire que le système orthogonal des fonctions fondamentales de K est *complet*.

Si, en effet, il existe une fonction h vérifiant la condition (10), il est immédiat que cette fonction vérifie $\overline{\varphi_i h} = 0$ quel que soit i : le système des φ_i n'est pas complet.

Si, d'autre part, ce système n'est pas complet, il existera une fonction h orthogonale à tous les φ_i; la fonction

$$\psi(x) = \int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds$$

a ses constantes de Fourier nulles; elle est nulle presque partout.

Remarquons en passant qu'un noyau fermé a nécessairement une infinité de valeurs caractéristiques.

(¹) On démontre, [37], p. 452, qu'elle est uniformément convergente pour l'ensemble des deux variables.

17. Noyaux symétriques définis. — Au début du Chapitre nous avons fait allusion aux relations entre l'étude des noyaux symétriques et celle des fonctionnelles homogènes et régulières du second degré

$$F[u] = \int_a^b \int_a^b K(x, y) u(x) u(y) \, dx \, dy \qquad [K(x, y) = K(y, x)],$$

avec l'argument variable $u(x)$. En faisant sur $K(x, y)$ les hypothèses du théorème de Hilbert et en appliquant ce théorème, il vient

$$(11) \qquad F[u] = \int_a^b u(y) \, dy \left\{ \sum_n \frac{\int_a^b u(x) \varphi_n(x) \, dx}{\lambda_n} \varphi_n(y) \right\},$$

d'où

$$F[u] = \sum_1^\infty {}_n \frac{1}{\lambda_n} \left(\int_a^b u \varphi_n \, dx \right)^2.$$

C'est là une expression canonique de la fonctionnelle qui correspond à la réduction canonique d'une forme quadratique à N variables. Il faut noter que, dans l'expression (11), il y a en quelque sorte un retour du continu au discontinu qui vient de ce que les valeurs caractéristiques λ_n sont isolées.

Si les valeurs fondamentales sont toutes du même signe + (ou —), la fonctionnelle $F[u]$ sera, quelle que soit u, $\geqq 0$ (ou $\leqq 0$); le noyau est alors dit *positif* (ou *négatif*). Sinon il est dit *ambigu*.

Dans ce dernier cas il est clair que la fonctionnelle $F[u]$ peut prendre la valeur zéro sans que la fonction u soit nulle. Il en est de même pour un noyau positif (ou négatif) s'il existe une fonction orthogonale à tous les φ_i, c'est-à-dire si ce noyau n'est pas fermé. Le seul cas où $F[u]$ ne puisse pas être nulle pour u non nul est celui d'un noyau à la fois fermé et positif (négatif) : un tel noyau est dit *défini positif* (*négatif*).

III. — AUTRES TYPES SPÉCIAUX DE NOYAUX.

18. De multiples travaux ont porté sur d'autres types de noyaux, pour lesquels on retrouve des propriétés plus ou moins analogues à celles des noyaux symétriques. Nous nous contenterons d'examiner quelques cas.

Le plus simple est celui d'un noyau de forme

$$A(x)\,B(y)\,k(x, y),$$

où $k(x, y)$ est symétrique. Son étude ([1]) repose sur les remarques suivantes :

Tout noyau de cette espèce peut se ramener à la forme

$$\frac{m(x)}{m(y)}\,k_1(x, y),$$

$k_1(x, y)$ étant encore symétrique. Il suffit de l'écrire

$$\sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{B(y)}{A(y)}}\cdot k(x, y)\sqrt{A(x)\,A(y)\,B(x)\,B(y)};$$

pour la transformation il est essentiel de supposer que $A(x)\,B(x)$ garde un signe constant, que l'on peut toujours prendre positif, quand x varie entre a et b.

D'autre part la composition de noyaux $\frac{m(x)}{m(y)}k_1(x, y)$ et $\frac{m(x)}{m(y)}l_1(x, y)$ donne $\frac{m(x)}{m(y)}\overset{0}{k}_1\overset{0}{l}_1$, d'où résulte que, si $\gamma_1(x, y; \lambda)$ est la résolvante de k_1, on aura la résolvante de $\frac{m(x)}{m(y)}k_1$ en prenant $\frac{m(x)}{m(y)}\gamma_1(x, y; \lambda)$.

Appliquons ces remarques au noyau

$$K(x, y) = A(x)\,B(y)\,k(x, y),$$

mis sous la forme

$$\sqrt{\frac{A(x)}{B(x)}\cdot\frac{B(y)}{A(y)}}\cdot k_1(x, y).$$

k_1 étant symétrique donnera des valeurs caractéristiques toutes réelles qui appartiennent aussi à K. Les fonctions fondamentales de k_1 forment une suite orthogonale. Il est naturel d'y mettre en évidence $\sqrt{A(x)\,B(x)}$ et de les écrire

$$\sqrt{A(x)\,B(x)}\,u_i(x),$$

les conditions d'orthogonalité donnant

$$(12)\qquad \int_a^b A(x)\,B(x)\,u_i(x)\,u_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{pour } i \neq j, \\ 1 & \text{pour } i = j, \end{cases}$$

([1]) *Cf.* Goursat, [36].

le noyau principal de k_1 pour le pôle λ_i étant alors

$$\frac{\sqrt{A(x)B(x)A(y)B(y)}\,u_i(x)\,u_i(y)}{\lambda_i}.$$

On voit de suite que les fonctions fondamentales associées du noyau K pour le pôle λ_i sont

$$\varphi_i(x) = A(x)\,u_i(x), \qquad \psi_i(x) = B(x)\,u_i(x);$$

on passe très simplement de l'une à l'autre. Les relations (12) donnent

$$(12') \qquad \int_a^b \varphi_i(x)\,\psi_j(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j; \end{cases}$$

les deux suites φ_i et ψ_i sont dites alors former *un système biorthogonal et normal.*

19. Diverses généralisations des résultats du paragraphe II se présentent ici. On peut envisager des développements en série d'une fonction $f(x)$ suivant les fonctions de l'une des deux suites qui constituent un système biorthogonal. Soit par exemple un développement

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x) + \ldots;$$

les coefficients seront donnés par

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\psi_n(x)\,dx.$$

L'extension de l'inégalité de Bessel nécessite quelques précautions, parce que les (12′) ne définissent les φ_i qu'à des facteurs constants près : on peut remplacer φ_i par $A_i\varphi_i$ en remplaçant ψ_i par $\frac{\psi_i}{A_i}$; on ne peut dès lors s'attendre à établir, sans avoir précisé les facteurs A_i, la convergence de la série $\Sigma_i c_i^2$. Mais introduisons un noyau symétrique $S(x, y)$ tel que

$$S(x, y) = \sum_i \frac{\psi_i(x)\,\psi_i(y)}{\mu_i},$$

les μ_i étant pris positifs et tels que la série soit absolument et uniformément convergente. Les relations (12′) s'écrivent

$$\int_a^b\int_a^b S(x, y)\,\varphi_i(x)\,\varphi_j(y)\,dx\,dy = \begin{cases} \frac{1}{\mu_i} & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{si } i \neq j, \end{cases}$$

et, en prenant $A_i = \sqrt{\mu_i}$, on peut faire en sorte que

$$\int_a^b \int_a^b S(x, y)\,\varphi_i(x)\,\varphi_i(y)\,dx\,dy = 1.$$

On vérifie de suite que le noyau S est positif et, en prenant les φ_i comme il vient d'être dit, l'intégrale, positive ou nulle

$$\int_a^b \int_a^b S(x, y)[f(x) - f_n(x)][f(y) - f_n(y)]\,dx\,dy$$

donne

$$\sum_1^n {}_i c_i^2 \leqq \int_a^b \int_a^b S(x, y) f(x) f(y)\,dx\,dy$$

qui tiendra le rôle de l'inégalité de Bessel : en particulier la série $\Sigma_i c_i^2$ est toujours convergente.

20. Le cas où le produit $A(x)B(x)$ n'a pas le même signe dans tout l'intervalle (a, b) est plus délicat.

Certains résultats s'étendent à des noyaux de forme

$$A(x)\,k(x, y),$$

où $A(x)$ change de signe et où $k(x, y)$ est symétrique et positif [1]. On démontre que : *si* $\overset{0}{K}{}^2$ *n'est pas identiquement nul, il y a au moins une valeur singulière; les diverses valeurs singulières sont réelles et pôles simples de la résolvante.*

21. Noyaux symétrisables. — Les noyaux précédents rentrent comme cas particuliers dans la classe, envisagée par J. Marty [2], des noyaux symétrisables.

$K(x, y)$ sera dit *symétrisable* si la composition par un noyau symétrique $S(x, y)$ donne un nouveau noyau symétrique. Deux cas sont d'ailleurs possibles :

1° $\overset{0}{K}\overset{0}{S}$ est symétrique, $\overset{0}{K}$ est alors symétrisable à droite (symétrisable *d*);

---

(1) *Cf.* Hilbert, [42], Fubini, [31], Marty, [70].
(2) *Cf.* Marty, [71, 72].

2° $\overset{0}{S}\overset{0}{K}$ est symétrique (noyau symétrisable g);

un noyau pouvant d'ailleurs être symétrisable à la fois à droite et à gauche.

Dans le cas où $S(x, y)$ est défini on étend les résultats précédents : *il y a au moins une valeur singulière et tous les pôles de la résolvante sont réels et simples.*

Remarquons que le noyau envisagé plus haut $A(x)B(y)k(x, y)$ est à la fois symétrisable g, en le composant par $B(x)k(x, y)B(y)$, et symétrisable d, en le composant par $A(x)k(x, y)A(y)$.

22. Noyaux symétriques gauches. — Ils ont été envisagés par Lalesco (1) et sont caractérisés par la condition

$$K(x,y) = -K(y, x). \tag{13}$$

Le noyau $\overset{0}{K}{}^2$ est alors symétrique, ce qui permet de rattacher ce cas au précédent.

L'étude directe est d'ailleurs immédiate. $\varphi_1(x)$ étant une fonction fondamentale de la valeur fondamentale λ_1, on a

$$\varphi_1(x) = \lambda_1 \int_a^b K(x, s)\varphi_1(s)\,ds$$

d'où, d'après (13),

$$\varphi_1(x) = -\lambda_1 \int_a^b \varphi_1(s)K(s, x)\,ds.$$

$-\lambda_1$ est donc aussi valeur caractéristique avec la fonction fondamentale *associée* φ_1 ; il en suit que λ_1 et φ_1 sont forcément imaginaires et, en accentuant les imaginaires conjuguées, on a aussi

$$\varphi'_1(x) = -\lambda'_1 \int_a^b \varphi'_1(s)K(s, x)\,dx.$$

Si $\lambda_1 \neq -\lambda'_1$ les deux fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi'_1(x)$, fonctions fondamentales associées pour des valeurs différentes de λ, doivent être orthogonales :

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi'_1(x)\,dx = 0,$$

(1) *Cf.* [55], p. 73-78.

ce qui est impossible. Il faut donc que l'on ait

$$\lambda_1 = -\lambda'_1;$$

toutes les valeurs fondamentales sont imaginaires pures.

Les pôles correspondants sont d'ailleurs toujours simples car, $i\mu_1$ étant l'un d'eux avec la fonction fondamentale $\varphi_1(x)$ (complexe), une fonction fondamentale associée sera $\varphi'_1(x)$ et

$$\int_a^b \varphi_1(x)\,\varphi'_1(x)\,dx \neq 0.$$

23. Il y a d'ailleurs toujours des valeurs caractéristiques (associées deux à deux comme on l'a vu) puisque le noyau $\overset{0}{N}{}^2$ est symétrique.

Tous les résultats établis pour le noyau symétrique se généralisent alors. La seule différence est due à ce que les fonctions fondamentales sont complexes : on a deux suites, finies ou infinies,

$$\begin{matrix} \varphi_1(x), & \varphi_2(x), & \ldots, & \varphi_n(x), & \ldots, \\ \varphi'_1(x), & \varphi'_2(x), & \ldots, & \varphi'_n(x), & \ldots, \end{matrix}$$

chaque couple φ_n, φ'_n donnant les solutions fondamentales associées pour les valeurs fondamentales $\pm i\mu_n$ (i étant le symbole des imaginaires). On aura d'ailleurs, en particulier,

$$\overline{\varphi_n \varphi'_m} = 0 \qquad \text{si } m \neq n$$

et l'on pourra choisir les fonctions φ_n de façon que

$$\overline{\varphi_n \varphi'_n} = 1.$$

On généralise alors les développements de Fourier sous la forme

$$f(x) = c_1\,\varphi_1(x) + \ldots + c_n\,\varphi_n(x) + \ldots$$

avec, nécessairement,

$$c_n = \int_a^b f(x)\,\varphi'_n(x)\,dx$$

et toute fonction continue de la forme

$$f(x) = \int_a^b \mathrm{K}(x, s)\,h(s)\,ds$$

sera développable en série uniformément et absolument convergente des φ_i.

On généralise de même les développements donnés pour le noyau dans le cas où il est symétrique.

IV. — NOYAU DISSYMÉTRIQUE. LES FONCTIONS FONDAMENTALES DE SCHMIDT.

24. Nous insisterons enfin sur la théorie qu'a développée M. E. Schmidt et qui s'applique à un noyau dissymétrique quelconque [1].

M. Schmidt associe à un tel noyau deux suites dont chacune est orthogonale et qui tiennent le rôle qu'avait, au début du chapitre, la suite unique des fonctions fondamentales d'un noyau symétrique. Les fonctions de ces deux suites n'ont en général aucun rapport avec les fonctions fondamentales précédemment définies : on les appellera fonctions fondamentales *de Schmidt*.

Elles sont définies par le système des deux équations intégrales

$$(14) \qquad \left\{ \begin{aligned} u(x) &= \lambda \int_a^b \mathrm{K}(x, \xi)\, v(\xi)\, d\xi, \\ v(x) &= \lambda \int_a^b u(\xi)\, \mathrm{K}(\xi, x)\, d\xi, \end{aligned} \right.$$

qu'il s'agit de résoudre en u et v, en déterminant λ de façon à avoir des solutions $u(x)$, $v(x)$ non nulles.

On fait en général l'étude du système (14) en remarquant que l'on en déduit

$$u(x) = \lambda^2 \int_a^b \overline{\mathrm{K}(x, \xi)}\, u(\xi)\, d\xi \quad \text{avec} \quad \overline{\mathrm{K}(x, y)} = \int_a^b \mathrm{K}(x, \eta)\, \mathrm{K}(y, \eta)\, d\eta,$$

$$v(x) = \lambda^2 \int_a^b \underline{\mathrm{K}(x, \xi)}\, v(\xi)\, d\xi \quad \text{avec} \quad \underline{\mathrm{K}(x, y)} = \int_a^b \mathrm{K}(\eta, x)\, \mathrm{K}(\eta, y)\, d\eta,$$

c'est-à-dire deux équations intégrales dont les noyaux sont symétriques.

25. Nous utilisons une autre méthode, indiquée par M. Pérès, en appliquant à (14) le procédé déjà indiqué (Chap. IX, n° 1). Il est aisé de diriger le calcul de façon à avoir une équation à noyau symétrique.

---

[1] *Cf.* SCHMIDT, [102].

Admettons que, ce qui peut toujours se faire, les limites d'intégrations soient o et 1 ; le système (14) équivaut à l'équation unique

(15) $$w(x) = \lambda \int_0^2 H(x, s)\, w(s)\, ds$$

en posant

$$w(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } 0 < x < 1, \\ v(x-1) & \text{si } 1 < x < 2; \end{cases}$$

$$H(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 < x, y < 1, \\ 0 & \text{si } 1 < x, y < 2, \\ K(x, y-1) & \text{si } 0 < x < 1, \quad 1 < y < 2, \\ K(y, x-1) & \text{si } 1 < x < 2, \quad 0 < y < 1. \end{cases}$$

Le noyau H est alors symétrique. Il a donc des valeurs fondamentales et qui sont réelles.

Soit λ_k l'une d'elles et $w_k(x)$ la fonction fondamentale. Nous pouvons toujours supposer que les w_k, qui forment un système orthogonal

(16) $$\int_0^2 w_k(x)\, w_i(x)\, dx = 0 \qquad \text{si } i \neq k,$$

sont choisies telles que

(17) $$\int_0^2 \{ w_k(x) \}^2\, dx = 2.$$

Chaque fonction w_k donne un couple de fonctions fondamentales de Schmidt, correspondant à la valeur singulière λ_k.

Avant d'aller plus loin il faut noter que les valeurs singulières de λ_k sont deux à deux opposées : il est clair, en effet, que si (14) admet le couple de solutions u_k, v_k pour la valeur λ_k, il admettra aussi le couple $u_k, -v_k$ pour la valeur $-\lambda_k$; d'où le résultat annoncé. Bien entendu il n'y a aucun intérêt à considérer ces deux valeurs opposées λ_k et $-\lambda_k$, de sorte que nous nous bornons aux λ_k positifs.

Nous avons donc une suite (limitée ou illimitée)

(18) $$\lambda_1, \quad \lambda_2, \quad \ldots, \quad \lambda_k, \quad \ldots,$$

à laquelle correspondent les deux suites

(19) $$u_1(x), \quad u_2(x), \quad \ldots, \quad u_k(x), \quad \ldots,$$

(20) $$v_1(x), \quad v_2(x), \quad \ldots, \quad v_k(x), \quad \ldots,$$

qui, les fonctions qui y figurent étant déduites des $w_k(x)$ indiqués plus haut, *sont l'une et l'autre orthogonale et normale.*

(16) et (17) donnent en effet

$$\overline{u_i u_k} + \overline{v_i v_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 2 & \text{si } i = k, \end{cases}$$

mais les équations (14) entraînent

$$\lambda_k \overline{v_i v_k} = \lambda_i \overline{u_i u_k},$$

d'où immédiatement le résultat

$$\overline{u_i u_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k, \end{cases}$$

$$\overline{v_i v_k} = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k, \\ 1 & \text{si } i = k. \end{cases}$$

26. Toute propriété du noyau symétrique $H(x, y)$ donnera de même une propriété du noyau dissymétrique $K(x, y)$.

En particulier, en appliquant à $H(x, y)$ le théorème de Hilbert (cf. *supra*, n° **14**) on a :

Théorème de Schmidt. — *Toute fonction $f(x)$ continue, qui se met sous la forme*

$$f(x) = \int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds \qquad \left(\textit{ou bien} \int_a^b h(s)\, K(s, x)\, ds\right),$$

est développable en série absolument et uniformément convergente des fonctions $u_n(x)$ [ou $v_n(x)$].

On pourra aussi envisager le développement du noyau H. On en déduit sans peine que :

Si la série $\sum_i \frac{u_i(x) v_i(y)}{\lambda_i}$ est uniformément convergente, on a l'égalité

$$K(x, y) = \sum_i \frac{u_i(x)\, v_i(y)}{\lambda_i}.$$

Ceci montre en particulier que les deux suites orthogonales $u_i(x)$ et $v_i(x)$ sont tout à fait indépendantes : on peut les choisir arbitrairement. En particulier, il peut fort bien arriver que l'une soit complète et pas l'autre.

V. — ÉQUATION DE FREDHOLM DE PREMIÈRE ESPÈCE.

27. Les *fonctions fondamentales* de Schmidt se sont révélées particulièrement utiles dans l'étude de l'équation de Fredholm de première espèce

$$\int_a^b K(x, s)\varphi(s)\,ds = f(x) \qquad (a \leqq x \leqq b) \tag{21}$$

[à résoudre par rapport à l'inconnue $\varphi(x)$]. Les résultats concernant cette équation sont principalement dus à Lauricella et à M. Picard, dont nous suivrons ici l'analyse ([1]).

Supposons qu'il existe une solution sommable et de carré sommable, soient d'_i ses coefficients de Fourier concernant les fonctions de Schmidt v_i et soient c_i les coefficients analogues de $f(x)$ concernant la suite des u_i. L'égalité (21) entraîne

$$c_i = \int_a^b f(x)\,u_i(x)\,dx = \frac{d'_i}{\lambda_i}$$

(les λ_i désignant les valeurs singulières de Schmidt) et, la série $\Sigma_i d'^2_i$ étant convergente, nous avons l'énoncé suivant :

Pour que l'équation (21) *ait une solution, il est nécessaire que la série*

$$\sum_i \lambda_i^2 c_i^2$$

soit convergente.

M. Picard a démontré que *cette condition est aussi suffisante quand les $u_i(x)$ forment un système complet.*

En effet, d'après les résultats du n° **12**, il existe toujours une fonction dont les coefficients de Fourier concernant la suite v_i soient précisément les nombres $\lambda_i c_i$; soit $h(x)$ cette fonction. La différence

$$f(x) - \int_a^b K(x, s)\,h(s)\,ds$$

donne alors des constantes de Fourier nulles pour la suite des u_i ; cette suite étant complète, la différence en question ne diffère de zéro qu'aux points d'un ensemble de mesure nulle et doit être considérée comme nulle si l'on se place, systématiquement, dans le champ ($\mathcal{H}$).

La solution ainsi obtenue est-elle unique dans le même champ?

([1]) *Cf.* LAURICELLA, [57, 58], PICARD, [80].

Pour s'en rendre compte, il suffit d'étudier l'équation sans second membre

$$(22)\qquad \int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds = 0.$$

Toute fonction qui vérifie (22) est, comme le montre un calcul facile, orthogonale à toutes les v_i. Elle sera nulle si le système des v_i est complet.

Lorsque le système des v_i n'est pas complet on pourra ajouter à la solution obtenue plus haut une fonction quelconque $k(x)$ orthogonale à toutes les v_i.

28. Examinons maintenant le cas où, la condition nécessaire du début étant toujours satisfaite, la suite u_i n'est pas complète.

Dans ce cas on peut encore trouver une fonction $h(x)$ telle que ses coefficients de Fourier (concernant les v_i) soient les nombres $\lambda_i c_i$, mais le raisonnement précédent montre seulement que

$$(21')\qquad \int_a^b K(x, s)\, h(s)\, ds = f(x) + f_1(x),$$

$f_1(x)$ étant une fonction orthogonale à tous les u_i. Il est clair d'ailleurs que, quel que soit le choix de $f_1(x)$, on aura les mêmes c_i et la même fonction $h(x)$: parmi toutes les équations de la forme (21'), il y en a une seule qui soit résoluble, elle admet d'ailleurs un nombre fini ou une infinité de solutions suivant que la suite v_i est ou non complète.

29. Donnons enfin quelques indications sur le cas où $\sum_i \lambda_i^2 c_i^2$ est divergente. L'équation (21) n'est pas résoluble, mais la somme

$$h_n(x) = \sum_{i}^{n}{}_{1}\, \lambda_i c_i\, v_i(x)$$

sera telle que

$$f(x) - \int_a^b K(x, s)\, h_n(s)\, ds = f - f_n,$$

en posant toujours

$$f_n = \sum_{i}^{n}{}_{1}\, c_i\, u_i(x).$$

On pourra donc (*cf.* n° 11) choisir n assez grand pour que

$$f(x) - \int_a^b K(x, s)\, h_n(s)\, ds$$

soit, en moyenne, arbitrairement petit.

30. Signalons enfin que, avant le développement des méthodes générales, M. Levi-Civita avait traité, [**63**], sous quelques conditions et par un procédé très élégant, des équations telles que

$$(23)\qquad \int_a^x k(x-s)\varphi(s)\,ds = f(x),$$

$$(24)\qquad \int_a^b k(x-s)\varphi(s)\,ds = f(x).$$

Soit l'équation (23) ($a \leqq x < \infty$), on en déduit aisément que

$$(25)\qquad \int_a^\infty \cos\pi t(x-z) f(x)\,dx$$

$$= A(t)\int_a^\infty \cos\pi t(s-z)\varphi(s)\,ds - B(t)\int_a^\infty \sin\pi t(s-z)\varphi(s)\,ds$$

avec

$$A(t) = \int_0^\infty k(\lambda)\cos\pi t\lambda\,d\lambda, \qquad B(t) = \int_0^\infty k(\lambda)\sin\pi t\lambda\,d\lambda,$$

et l'on aura une équation analogue avec un *sinus* au premier membre. M. Levi-Civita tire de ces deux équations $\int_a^\infty \cos\pi t(x-z)\varphi(x)\,dx$, puis, supposant satisfaites les conditions pour appliquer l'intégrale double de Fourier et intégrant en t de 0 à $+\infty$, il aboutit à la conclusion que

$$I(z) = \int_0^\infty dt \int_a^\infty \frac{A(t)\cos\pi t(x-z) + B(t)\sin\pi t(x-z)}{\{A(t)\}^2 + \{B(t)\}^2} f(x)\,dx$$

doit donner $\varphi(z)$ pour $z > a$ et être nulle pour $z < a$. Sous cette dernière condition et avec les hypothèses nécessaires à la validité des calculs précédents, il a donc une expression analytique nécessaire de l'inconnue $\varphi(z)$, expression qu'il vérifie directement.

Pour l'équation (24), M. Levi-Civita ne limite pas à (a, b) l'intervalle de variation de x, mais considère le cas où cette équation est satisfaite quel que soit x. Introduisant une expression $J(z)$ analogue à $I(z)$ [les intégrales qui donnent $A(t)$ et $B(t)$ ainsi que l'intégrale par rapport à x ayant les limites $-\infty$ et $+\infty$], il montre que $J(z)$ doit être nulle pour $z < a$ et $z > b$ et donnera $\varphi(z)$ pour $a < z < b$.

CHAPITRE XI.

LES ÉQUATIONS INTÉGRALES NON LINÉAIRES.

I. — ÉTUDE DE QUELQUES CAS SIMPLES.

1. En abordant, au Chapitre VI, l'étude des équations intégrales, nous avons posé le problème général de l'*inversion* d'une transformation fonctionnelle

$$F\left[y\binom{b}{t}_{a}, x\right] = z(x),$$

faisant passer de la fonction $y(x)$ à la fonction $z(x)$. Nous avons de suite particularisé la question en nous bornant au cas où la fonctionnelle F est linéaire en y et où elle est régulière, avec, éventuellement, la valeur exceptionnelle x. Nous avons ainsi été amenés aux équations intégrales linéaires, qui viennent d'être étudiées. Il convient maintenant de passer au cas où la fonctionnelle F n'est pas linéaire; on a alors une *équation intégrale non linéaire*.

2. Les exemples les plus simples d'équations non linéaires que l'on puisse traiter s'obtiennent en remarquant que la méthode des approximations successives, telle qu'on l'a appliquée plus haut à l'équation de Volterra ou à l'équation de Fredholm, s'appliquera encore aux équations (¹)

$$(1) \qquad \varphi(x) - \int_a^x H\big(x, \xi, \varphi(\xi)\big)\, d\xi = h(x),$$

$$(2) \qquad \varphi(x) - \int_a^b H\big(x, \xi, \varphi(\xi)\big)\, d\xi = h(x),$$

(¹) *Cf.* LALESCO, [55].

respectivement à limites variables et à limites fixes, dans lesquelles $h(x)$ est donnée et dans lesquelles H est une fonction ordinaire, également donnée, des trois quantités qui y figurent x, ξ, φ.

Certains problèmes aux limites concernant les équations différentielles ou les équations aux dérivées partielles conduisent à des équations intégrales du type précédent ou de types très analogues. Nous avons déjà vu (Chap. VI, § V) que les équations de Volterra peuvent être rattachées aux équations différentielles linéaires; en partant d'une équation différentielle non linéaire, on pourra obtenir de même une équation intégrale non linéaire.

Prenons, par exemple, l'équation différentielle

$$\frac{d\varphi}{dx} = \mathrm{H}(x, \varphi), \tag{3}$$

et soit à déterminer son intégrale $\varphi(x)$ qui, pour $x = a$, prend la valeur φ_0; on a à satisfaire

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \int_a^x \mathrm{H}\big(\xi, \varphi(\xi)\big)\, d\xi, \tag{4}$$

qui est un cas particulier de (1).

Soit encore l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x\, \partial y} = \mathrm{H}(x, y, \varphi), \tag{5}$$

dont on cherche une intégrale $\varphi(x, y)$ prenant des valeurs assignées

$$h(y) = \varphi(a, y),$$
$$k(x) = \varphi(x, b)$$

[avec $h(b) = k(a)$] lorsque x et y prennent les valeurs fixées a et b (problème de Riemann). On se ramènera à l'équation intégrale

$$\varphi(x, y) = \int_a^x d\xi \int_b^y \mathrm{H}\big(\xi, \eta; \varphi(\xi, \eta)\big)\, d\eta + h(y) + k(x) - k(a), \tag{6}$$

où figure une intégrale multiple, mais qui est tout à fait analogue à (1).

3. Examinons en détail le cas de l'équation (1). Comme l'a remarqué Lalesco [1] on peut lui étendre la méthode d'approximations

[1] *Loc. cit.*

successives suivie par M. Picard pour établir le théorème d'existence concernant l'équation différentielle (3).

Admettons que la fonction $H(x, \xi, \varphi)$ soit définie dans le champ

$$a \leqq \xi \leqq x \leqq b,$$
$$A - m \leqq \varphi \leqq A + m,$$

avec les inégalités

$$|H(x, \xi, \varphi_1)| < M,$$
$$|H(x, \xi, \varphi_1) - H(x, \xi, \varphi_2)| < N|\varphi_1 - \varphi_2|,$$

φ_1 et φ_2 étant deux valeurs de φ quelconques dans l'intervalle $(A - m, A + m)$; a, b, A, m, M, N étant des constantes. Admettons enfin que, quand x varie de a à x_0, on ait

$$A - \varepsilon(x_0) \leqq h(x) \leqq A + \varepsilon(x_0),$$

(on peut donc prendre pour $\varepsilon(x_0)$ la borne supérieure de $|h(x) - A|$ dans l'intervalle (a, x_0)) et limitons-nous à un intervalle de variation de x : $a \leqq x \leqq x_0$ tel que l'on ait à la fois

$$x_0 < b, \qquad \varepsilon(x_0) + M(x_0 - a) < m.$$

Les approximations successives seront

$$\varphi_0(x) = h(x),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\varphi_n(x) = h(x) + \int_a^x \big(H(x, s, \varphi_{n-1}(s)\big) \, ds,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

et il est facile de voir que, dans l'intervalle (a, x_0), la limite de $\varphi_n(x)$ existe et est la solution de (1). On étudiera pour cela la série

$$(7) \qquad \varphi_0 + (\varphi_1 - \varphi_0) + \ldots + (\varphi_n - \varphi_{n-1}) + \ldots.$$

D'après le choix de l'intervalle (a, x_0), il est clair que les diverses fonctions φ_n restent comprises entre $A - m$ et $A + m$; on a alors

$$|\varphi_1 - \varphi_0| < M(x - a),$$

d'où

$$|\varphi_2 - \varphi_1| < MN \int_a^x (\xi - a) \, d\xi = MN \frac{(x - a)^2}{2!},$$

et, en général,

$$|\varphi_n - \varphi_{n-1}| < MN^{n-1} \frac{(x - a)^n}{n!}.$$

La série (7) est donc absolument et uniformément convergente et elle définit une fonction $\varphi(x)$ $\left[\text{égale à } \lim_{n=\infty} \varphi_n(x)\right]$ évidemment solution de (1).

On constate aisément qu'il ne peut exister, dans le même intervalle, une autre solution $\bar{\varphi}(x)$ de l'équation (1) restant comprise entre $A - m$ et $A + m$. L'égalité

$$\varphi(x) - \bar{\varphi}(x) = \int_a^x \left\{ H\big(x, \xi, \varphi(\xi)\big) - H\big(x, \xi, \bar{\varphi}(\xi)\big) \right\} d\xi$$

entraînerait

$$|\varphi(x) - \bar{\varphi}(x)| < 2m N^n \frac{(x-a)^n}{n!},$$

quel que soit n, d'où

$$\varphi(x) \equiv \bar{\varphi}(x).$$

4. La méthode s'étend évidemment à d'autres cas : équations où figurent des intégrales multiples [la précédente (6), par exemple], systèmes d'équations intégrales auxquels amènent, par exemple. des systèmes d'équations différentielles (¹).

Prenons maintenant, au lieu de (1), l'équation (2) à limites fixes. On définira sans peine les approximations successives pourvu que, en gardant les notations précédentes, on ait

$$\varepsilon(b) + M(b-a) < m;$$

seulement l'inégalité pour $\varphi_n - \varphi_{n-1}$ devra être remplacée par

$$|\varphi_n - \varphi_{n-1}| < M N^{n-1} (b-a)^n,$$

sans *factorielle* au dénominateur, de sorte que l'on ne peut affirmer la convergence des approximations que lorsque

$$N(b-a) < 1.$$

Si l'on introduit (comme dans l'équation de Fredholm) un paramètre λ devant l'intégrale qui figure au premier membre de (2), l'équation obtenue aura une solution, d'ailleurs unique, pour $|\lambda|$ inférieur à la fois à

$$\frac{m - \varepsilon(b)}{M(b-a)} \quad \text{et} \quad \frac{1}{N(b-a)}.$$

(¹) *Cf.* E. Cotton, [17], M. Picone, [84].

5. Les précédentes (1) et (2) contiennent $\varphi(x)$ linéairement en dehors du signe d'intégration : elles peuvent être dites de seconde espèce. Les équations de première espèce correspondantes sont plus difficiles. Prenons seulement

$$\int_a^x \mathrm{H}\big(x, \xi, \varphi(\xi)\big)\, d\xi = h(x). \tag{8}$$

On en tire, par dérivation,

$$\mathrm{H}\big(x, x, \varphi(x)\big) + \int_a^x \mathrm{H}'_x\big(x, \xi, \varphi(\xi)\big)\, d\xi = h'(x), \tag{8'}$$

pour laquelle on pourra dans certains cas utiliser les approximations successives

$$\mathrm{H}\big(x, x, \varphi_n(x)\big) = h'(x) - \int_a^x \mathrm{H}'_x\big(x, \xi, \varphi_{n-1}(\xi)\big)\, d\xi.$$

Mais la détermination de φ_n se fait par résolution d'une équation

$$\mathrm{H}\big(x, x, \varphi_n(x)\big) = f(x),$$

et, quand il y a des ramifications, elles pourront dépendre du second membre et ne pas se retrouver identiques dans toutes les approximations.

II. — LES RÉSULTATS GÉNÉRAUX DE M. VOLTERRA.

6. Quel que soit leur intérêt et, parfois, leur difficulté, les cas envisagés plus haut ne peuvent donner une théorie générale. Les bases d'une telle théorie ont été posées par M. Volterra (1) grâce à l'extension, au cas des transformations fonctionnelles, de la notion de *déterminant fonctionnel.*

7. Reprenons une substitution entre deux groupes de n variables

$$z_i = f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n); \tag{9}$$

on sait que, pour l'inversion des équations (9), intervient de façon

(1) VOLTERRA, [128] et aussi [113] de la bibliographie I.

essentielle le déterminant fonctionnel

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(y_1, y_2, \ldots y_n)}.$$

Soit un système de valeurs des y (y_1^0, y_2^0, $\ldots$, y_n^0) et les valeurs correspondantes des z : (z_1^0, z_2^0, $\ldots$, z_n^0). Si, pour ces valeurs, le déterminant fonctionnel n'est pas nul, les équations (9) auront une solution unique

$$(9') \qquad y_i = g_i(z_1, z_2, \ldots, z_n),$$

où les fonctions g_i sont définies pour les valeurs z_j assez voisines de z_j^0 et se réduisent à y_i^0 pour $z_j = z_j^0$ (i, $j = 1, 2, \ldots, n$). En somme, l'inversion de la substitution (9) est possible, et cette substitution est définie de façon biunivoque, au voisinage des deux groupes de valeurs correspondantes (y_1^0, $\ldots$, y_n^0)(z_1^0, $\ldots$, z_n^0).

Remarquons que le déterminant fonctionnel est le déterminant des équations linéaires obtenues par différentiation

$$(10) \qquad dz_i = \sum_{1}^{n}{}_k \frac{\partial f_i}{\partial y_k} dy_k.$$

8. Passant au cas d'une transformation fonctionnelle

$$(11) \qquad z(x) = F\left[x, y\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right)\right],$$

M. Volterra en déduit qu'il faut envisager de même la relation déduite par différentiation

$$(12) \qquad \delta z(x) = F_1\left[x, y\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right), \delta y\left(\overset{b}{\underset{a}{t}}\right)\right],$$

où F_1 (différentielle de F) est une fonctionnelle de deux arguments $y(t)$ et $\delta y(t)$, linéaire et homogène par rapport au second.

$\delta y(t)$ étant prise comme inconnue, l'équation (12) est *linéaire* et sa résolution sera un préliminaire indispensable à l'étude de (11). ***De plus, pour les questions concernant l'inversion de transformations fonctionnelles telles que*** (11), ***nous devrons adopter une classification basée sur la nature des transformations*** (12) ***correspondantes*** (***équations aux variations***).

9. Dans les cas les plus usuels, l'équation aux variations (12) sera une équation intégrale linéaire, de Volterra ou de Fredholm, par rapport à $\delta y(t)$. Le déterminant de cette équation joue alors le rôle que jouait le déterminant fonctionnel pour le cas d'une substitution sur n variables : *on peut l'appeler déterminant de la transformation fonctionnelle* (11).

Supposons que (11) soit satisfaite pour un couple de fonctions $y_0(t)$, $z_0(t)$ et que la valeur correspondante du *déterminant* soit différente de zéro. Il est à prévoir — et nous le justifierons dans la suite pour des cas très étendus — que l'on aura l'énoncé suivant :

L'équation (11) *définit, et de façon unique, une fonctionnelle*

$$y(x) = G\left[x, \overset{b}{\underset{a}{z(t)}}\right], \tag{13}$$

telle que, lorsque $z(t)$ se réduit à $z_0(t)$, $y(t)$ se réduit à $y_0(t)$; la relation fonctionnelle entre les arguments $y(t)$ et $z(t)$ est biunivoque dans des voisinages, à préciser, des fonctions dont on est parti.

10. Des considérations analogues s'appliqueront à une équation du type

$$F\left[\overset{b}{\underset{a}{y(t)}}, \overset{b}{\underset{a}{z(t)}}, x\right] = 0 \quad (^1), \tag{14}$$

dont on veut tirer $y(x)$, pour $a \leqq x \leqq b$, en supposant connu $z(x)$. C'est une équation définissant de façon implicite la fonctionnelle cherchée

$$y(x) = G\left[\overset{b}{\underset{a}{z(t)}}, x\right], \tag{15}$$

et qui généralise un système de n équations

$$f_i(y_1, y_2, \ldots, y_n; z_1, z_2, \ldots, z_n) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{14'}$$

dont il s'agit de tirer les y en fonction des z.

Dans ce cas encore la question préliminaire sera la résolution de l'équation

$$\delta F = 0,$$

---

[1] Dans cette équation les fonctions-arguments y et z sont prises dans un même intervalle : ce n'est évidemment pas une restriction et il est toujours aisé, par changement de variable, de se ramener à ce cas.

que nous écrirons

$$F_1\left[\overset{b}{\underset{a}{y(t)}},\ \overset{b}{\underset{a}{z(t)}},\ \overset{b}{\underset{a}{\delta y(t)}},\ \overset{b}{\underset{a}{\delta z(t)}},\ x\right] = 0. \tag{16}$$

F_1, différentielle de F, étant une fonctionnelle linéaire par rapport à δy et δz. Il faudra résoudre (16) par rapport à δy et l'on sera conduit, comme plus haut, à définir par la considération de (16) le *déterminant* de (14).

Soit en effet un couple $y_0(t)$, $z_0(t)$ de fonctions vérifiant (14). Nous pourrons, sans restreindre la généralité, prendre y_0 et z_0 nuls identiquement (il suffira de remplacer les arguments $y(t)$ et $z(t)$ par $y(t) - y_0(t)$ et $z(t) - z_0(t)$. Admettons donc que, pour $y(t)$ et $z(t)$ nuls, l'équation (16) se réduise à une équation de Fredholm en δy et qu'elle s'écrive

$$\delta y(x) + \int_a^b \delta y(\xi)\, K(\xi, x)\, d\xi = H\left[\overset{b}{\underset{a}{\delta z(t)}},\ x\right], \tag{16'}$$

H étant fonctionnelle linéaire de δz. Le déterminant de cette équation de Fredholm sera le déterminant de la relation fonctionnelle (14), pour les valeurs nulles de $y(t)$ et $z(t)$. S'il est différent de zéro on aura en général le même énoncé que plus haut : *on tire de* (14)

$$y(x) = G\left[\overset{b}{\underset{a}{z(t)}},\ x\right], \tag{15}$$

fonctionnelle bien déterminée pour $y(t)$ *et* $z(t)$ *assez voisines de zéro.*

Dans la démonstration il faudra employer la méthode des approximations successives. On devra, en général, diriger les calculs de la façon suivante : on écrit (14) sous la forme

$$\begin{aligned} y(x) &+ \int_a^b y(\xi)\, K(\xi, x)\, d\xi \\ &= F\left[\overset{b}{\underset{a}{y(t)}},\ \overset{b}{\underset{a}{z(t)}},\ x\right] - y(x) - \int_a^b y(\xi)\, K(\xi, x)\, d\xi, \end{aligned} \tag{14$_1$}$$

et l'on résout l'équation de Fredholm (14_1), où le second membre est considéré comme connu. On tombe ainsi sur une équation équivalente

$$y(x) = \Omega\left[\overset{b}{\underset{a}{y(t)}},\ \overset{b}{\underset{a}{z(t)}},\ x\right], \tag{14$_2$}$$

où Ω est une nouvelle fonctionnelle *dont la différentielle est nulle lorsque* $y(t)$, $z(t)$ et $\delta y(t)$ sont identiquement nuls. C'est sur (14_2) qu'il convient de faire les approximations successives en prenant

$$(16)\quad \begin{cases} y_0(x) = \Omega\left[\quad 0, \quad \overset{b}{\underset{a}{z(t)}}, x\right], \\ y_1(x) = \Omega\left[\overset{b}{\underset{a}{y_0(t)}}, \overset{b}{\underset{a}{z(t)}}, x\right], \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ y_n(x) = \Omega\left[\overset{b}{\underset{a}{y_{n-1}(t)}}, \overset{b}{\underset{a}{z(t)}}, x\right], \end{cases}$$

et $y_n(x)$ convergera vers une solution $y(x)$ sous des conditions très peu restrictives.

11. Cas particulier d'une fonctionnelle développable en série de puissances fonctionnelles. — M. Volterra avait traité en détail, dès 1905, le cas où la fonctionnelle qui figure dans (11) ou dans (14) admet un développement en série du type analogue à celui de Taylor (*cf.* Chap. IV, n° 13).

Prenons par exemple l'équation

$$(17)\quad \begin{aligned} \mu\, z(x) = y(x) &+ \lambda \int_0^1 K_1(x;\, t)\, y(t)\, dt + \dots \\ &+ \frac{\lambda^n}{n!} \int_0^1 \dots \int_0^1 K_n(x;\, t_1, t_2, \dots, t_n) \\ &\qquad\qquad \times y(t_1) \dots y(t_n)\, dt_1 \dots dt_n + \dots, \end{aligned}$$

où l'inconnue est $y(x)$, les noyaux donnés $K_n(x;\, t_1, \dots, t_n)$ étant symétriques par rapport à $t_1, \dots, t_n$. λ et μ sont deux paramètres qu'il est commode d'introduire dans le calcul, mais qui ne jouent aucun rôle essentiel. Nous cherchons une solution de (17) nulle en même temps que $\mu z(x)$.

Il est commode de prendre un développement de cette solution suivant les puissances de μ. En dérivant (17) par rapport à μ et faisant $\mu = 0$, il vient

$$z(x) = \left\{\frac{dy}{d\mu}\right\}_{\mu=0} + \lambda \int_0^1 K_1(x,\, t) \left(\frac{dy(t)}{d\mu}\right)_{\mu=0} dt,$$

qui est, aux notations près, l'équation aux variations correspondant à (17) et, si le déterminant de cette équation n'est pas nul, on en

tirera $\left[\frac{dy}{d\mu}\right]_{\mu=0}$. En dérivant (17) deux fois par rapport à μ, puis faisant $\mu = 0$, on a

$$0 = \left[\frac{d^2y}{d\mu^2}\right]_{\mu=0} + \lambda \int_0^1 K_1(x;t)\left[\frac{d^2y(t)}{d\mu^2}\right]_{\mu=0} dt$$
$$+ \lambda^2 \int_0^1 \int_0^1 K_2(x;t_1,t_2)\left[\frac{dy(t_1)}{d\mu}\right]_{\mu=0}\left[\frac{dy(t_2)}{d\mu}\right]_{\mu=0} dt_1\,dt_2,$$

équation de Fredholm qui a le même déterminant que la précédente et détermine donc de façon unique $\left[\frac{d^2y}{d\mu^2}\right]_{\mu=0}$. On calculera de même les dérivées suivantes de y par rapport à μ et il restera à vérifier. ce qui est très simple, que la série

$$(18) \qquad y(x) = \mu\left[\frac{dy}{d\mu}\right]_{\mu=0} + \frac{\mu^2}{2!}\left[\frac{d^2y}{d\mu^2}\right]_{\mu=0} + \ldots$$

représente une solution de (17). Or on voit aisément que cette série converge pour $|\mu z(x)| < \varepsilon$, ε étant pris assez petit et qu'elle satisfait alors (17) : elle donne la seule solution de (17) qui tende vers zéro en même temps que $\mu z(x)$ (la définition de la distance fonctionnelle étant la définition élémentaire) et l'on a bien ainsi l'inversion univoque de la transformation fonctionnelle (17) dans un voisinage d'ordre zéro du couple de fonctions $y_0(x) \equiv 0$, $z_0(x) \equiv 0$. Le lecteur constatera d'ailleurs que (18) est une série de puissances fonctionnelles tout à fait de même type que (17).

III. — LES ÉQUATIONS DE SCHMIDT. CAS OU LE DÉTERMINANT N'EST PAS NUL.

12. Dans un Mémoire publié en 1908, M. E. Schmidt [1] traite le cas où la fonctionnelle F est donnée par une série où interviennent non seulement comme dans (17) des fonctionnelles *régulières*, mais des fonctionnelles *normales*. Il envisage le déterminant de l'équation fonctionnelle, défini comme plus haut et, dans le cas où ce déterminant n'est pas nul, son analyse se rattache directement aux méthodes

(1) *Cf.* SCHMIDT, [103].

qui viennent d'être exposées. Il étudie ensuite les cas où le déterminant est nul et ses résultats sur ce sujet sont entièrement originaux et de la plus haute importance. Nous les exposerons au paragraphe suivant, mais nous devons auparavant donner les formules de M. Schmidt pour le cas du déterminant non nul.

13. Calculs sur des séries de monomes fonctionnels. — Nous prendrons, pour fixer les idées, deux fonctions-argument $u(s)$ et $v(s)$ définies pour $0 \leq s \leq 1$ et nous considérerons une fonctionnelle homogène en u et v, de degrés respectifs m et n, ayant la forme

$$(19) \quad u^{\alpha_0}(s)\, v^{\beta_0}(s) \int_0^1 \cdots \int_0^1 k(s;\, t_1,\, t_2,\, \ldots,\, t_\rho) \\ \times u^{\alpha_1}(t_1)\, v^{\beta_1}(t_1) \ldots u^{\alpha_\rho}(t_\rho)\, v^{\beta_\rho}(t_\rho)\, dt_1\, dt_2 \ldots dt_\rho,$$

nous dirons que c'est un *monome fonctionnel* [1]. Les α et les β sont des exposants positifs ou nuls tels que

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \ldots + \alpha_\rho = m,$$
$$\beta_0 + \beta_1 + \ldots + \beta_\rho = n$$

et tels de plus que les deux nombres α_i et β_i $(i = 1, 2, \ldots \rho)$ ne soient jamais simultanément nuls. k sera dit *coefficient* du monome. Nous n'écartons pas le cas où les intégrales disparaîtraient, l'expression (19) se réduisant à

$$(19') \qquad u^m(s)\, v^n(s)\, k(s)$$

avec le coefficient $k(s)$. Les fonctions u et v et les coefficients k sont supposés bornés. On envisagera de même des monomes fonctionnels à un nombre quelconque d'arguments.

A une expression (19) ou (19′) nous ferons correspondre le monome, au sens ordinaire, dit monome *majorant*

$$KU^m V^m$$

contenant les variables U et V essentiellement positives et avec un coefficient K essentiellement positif, U, V, K étant d'ailleurs choisis

---

(1) Cette dénomination est critiquable, parce que (19) provient d'un polynome ordinaire par le passage du discontinu au continu; elle est commode ici.

Notons que, abstraction faite du facteur $u^{\alpha_0}(s) v^{\beta_0}(s)$ la fonctionnelle (19) est *normale* en u et en v, au sens du Chapitre III.

de façon que

$$|u(s)| < \mathrm{U}, \qquad |v(s)| < \mathrm{V}, \qquad |k(s;\, t_1, \ldots, t_\rho)| < \mathrm{K},$$

de sorte que le module de (19) est inférieur à $\mathrm{KU}^m\mathrm{V}^n$.

Pour la suite il est essentiel de noter qu'il existe plusieurs types différents de monomes fonctionnels correspondant aux mêmes degrés *m* et *n*. Ils diffèrent par les valeurs des α et de β. On peut toujours, en permutant les variables d'intégration, s'arranger pour que

$$\alpha_1 \geqq \alpha_2 \geqq \ldots \geqq \alpha_\rho$$

et pour que, lorsque $\alpha_\mu = \alpha_\nu$, on ait $\beta_\mu \geqq \beta_\nu$; les exposants étant ainsi ordonnés, deux monomes seront de même type si les couples d'exposants $\alpha_0\beta_0$, $\alpha_1\beta_1$, ..., $\alpha_\rho\beta_\rho$ qui y figurent sont les mêmes. Si l'on a à ajouter des monomes de même type, on pourra les réduire à un seul obtenu par addition des coefficients.

Remarquons enfin que le nombre des *types* correspondants à des degrés *m* et *n* donnés est fini et que des monomes fonctionnels de types différents, mais de mêmes degrés en *m* et *n*, auront des monomes majorants semblables.

14. Nous désignerons par la notation

$$(20) \qquad f_{mn}\left[u(\overset{1}{\underset{0}{t}}),\ v(\overset{1}{\underset{0}{t}});\, s\right]$$

une somme de monomes (19) ayant les mêmes degrés *m* et *n* (¹). Il lui correspond un monome majorant

$$\mathrm{F}_{mn}\mathrm{U}^m\mathrm{V}^n$$

obtenu par addition des monomes qui majorent les divers termes de f_{mn}. Enfin nous aurons à considérer des séries de fonctionnelles de la forme (20). L'une de ces séries étant

$$(21) \qquad \sum_0^\infty {}_{mn} f_{mn}\left[u(\overset{1}{\underset{0}{t}}),\ v(\overset{1}{\underset{0}{t}});\, s\right],$$

nous lui ferons correspondre une série majorante

$$(21') \qquad \sum_0^\infty {}_{mn} \mathrm{F}_{mn}\mathrm{U}^m\mathrm{V}^n,$$

série de puissances ordinaire des variables U et V.

(¹) On emploiera des notations analogues pour un nombre quelconque de fonctions-argument.

15. La série (21) définira, quand elle sera convergente, une fonctionnelle de u et v dépendant aussi de la variable s. Suivant ce qui a déjà été fait au Chapitre III, § III, il est naturel de porter son attention sur le cas où la série majorante (21′) est convergente.

Si (21′) converge pour un couple de valeurs U_0 et V_0, il est clair que (21) sera absolument et uniformément convergente pour toutes les fonctions u et v qui vérifient

$$|u(s)| < U_0, \qquad |v(s)| < V_0; \tag{22}$$

(21) sera dite, alors, *régulièrement convergente* : une série de type (21) régulièrement convergente donne une fonctionnelle de u et v dans les champs fonctionnels (22) (voisinages élémentaires des fonctions-argument nulles).

Les calculs sur les séries régulièrement convergentes de monomes fonctionnels se font sans difficulté. Le produit de deux monomes est un nouveau monome; si, dans un monome fonctionnel en u et v on remplace u par un monome en v,

$$u(s) = v^{\gamma_0}(s)\int_0^1 \ldots \int_0^1 l(s;\, t_1, \ldots, t_\sigma)\, v^{\gamma_1}(t_1) \ldots v^{\gamma_\sigma}(t_\sigma)\, dt_1 \ldots dt_\sigma,$$

on a un nouveau monome qui ne dépend plus que de v. Dans les deux cas les mêmes opérations effectuées sur les monomes majorants donnent un monome qui majore le résultat. Il en résulte de suite que :

I. *On peut faire le produit de deux séries du type* (21) *régulièrement convergentes. La série produit est régulièrement convergente.*

Une série majorante du produit s'obtient d'ailleurs par le produit des séries qui majorent les facteurs.

II. *Étant donnée une série de fonctionnelles régulièrement convergente* (21), *on peut y remplacer* $u(s)$ *par une série analogue de l'argument* $v(s)$ *ou de tout autre argument* $w(s)$, *par exemple*

$$u(s) = \sum_1^\infty {}_\mu\, g_\mu\left[w(\overset{1}{\underset{0}{t}});\, s\right] \tag{23}$$

(*cette série ne contenant pas de terme de degré zéro*) *et effectuer le calcul terme à terme.*

Observons qu'une série majorante du résultat s'obtiendra en faisant le même calcul sur les séries

$$\sum_{0}^{\infty}{}_{mn} F_{mn} U^m V^n \quad \text{et} \quad \sum_{1}^{\infty}{}_{\mu} G_\mu W^\mu,$$

majorantes de (21) et (23) ([1]).

16. Équations de Schmidt. — Après ces préliminaires, abordons la théorie d'une équation fonctionnelle de forme

$$(24) \qquad f\left[u(\overset{1}{\underset{0}{t}}), v(\overset{1}{\underset{0}{t}}); s\right] = 0,$$

la fonctionnelle f étant donnée par une série du type précédent :

$$f = \sum_{0}^{\infty}{}_{mn} f_{mn}[u(t), v(t); s].$$

Il s'agit de résoudre (24) *par rapport à* $u(s)$.

Nous admettrons que (24) ait lieu pour $u(s)$ et $v(s)$ nuls, ce qui entraîne que f_{00} soit nul et nous en définirons la solution dans des voisinages (élémentaires) des arguments u et v nuls.

Si nous mettons en évidence dans (24) les termes correspondants à $m = 1, n = 0$, termes qui ne contiennent que u et au premier degré, qui peuvent donc s'écrire

$$-c(s)u(s) + \int_0^1 c(s, t)u(t)\,dt,$$

l'équation (24) deviendra ([2])

$$(24') \quad c(s)u(s) - \int_0^1 c(s, t)u(t)\,dt = f_{01}[v; s] + \sum_{m+n \geq 2} f_{mn}[u, v; s],$$

et l'équation aux variations, écrite pour $u(s)$ et $v(s)$ nuls, sera

$$(25) \qquad c(s)\,\delta u(s) - \int_0^1 c(s, t)\,\delta u(t)\,dt = f_{01}[\delta v; s].$$

([1]) Il est élémentaire que la série ainsi obtenue est convergente pour V et W assez petits.

([2]) f_{01} ne contient pas u.

Si $c(s)$ n'est pas nul dans l'intervalle $(0, 1)$, c'est une équation de Fredholm régulière et, en divisant par $c(s)$, on peut se ramener au cas où $c(s)$ est égal à *un*. Si $c(s)$ s'annule pour des valeurs isolées, on a une équation singulière du type de M. Picard (Chap. IX, n° 13, *équation de troisième espèce*); si $c(s)$ est identiquement nul, on a une *équation de première espèce*. M. Schmidt laisse de côté ces deux derniers cas.

17. (25) est donc une équation de Fredholm régulière et le déterminant de cette équation sera le déterminant de la relation fonctionnelle (24). S'il n'est pas nul, nous pourrons appliquer la méthode indiquée au paragraphe précédent, n° **10**. (24') a précisément la forme indiquée (14_1) au n° **10**; on la résoudra en $u(s)$ en supposant pour un instant le second membre connu. On aura ainsi

$$(24'') \qquad u(s) = g_{01}\left[v\left(\begin{smallmatrix}1\\t\\0\end{smallmatrix}\right); s\right] + \sum_{\substack{mn\\ m+n\geq 2}} g_{mn}[u, v; s],$$

le second membre étant une série de tout point analogue à celle qui figure dans (24') et dont les divers termes g_{mn} se calculent facilement en fonction des f_{mn} et du noyau résolvant de l'équation de Fredholm.

D'après le n° **10** précédent, c'est à cette équation qu'il faut appliquer la méthode d'approximations successives, et cela ne fait pas de difficulté.

18. M. Schmidt procède de façon un peu différente. Il remarque que l'on satisfait formellement à (24'') par une série analogue

$$(26) \qquad u(s) = h_1\left[v\left(\begin{smallmatrix}1\\t\\0\end{smallmatrix}\right); s\right] + \ldots + h_p\left[v\left(\begin{smallmatrix}1\\t\\0\end{smallmatrix}\right); s\right] + \ldots$$

$h_1, h_2, \ldots, h_p$, étant respectivement homogènes en v de degrés $1, 2, \ldots, p, \ldots$ (ce sont des sommes de monomes fonctionnels). Si l'on porte dans (24'') et que l'on identifie, on voit que les termes du premier degré ne peuvent venir que de g_{01}; il faudra prendre

$$h_1[v; s] = g_{01}[v; s].$$

En général les termes h_p s'obtiennent en remplaçant dans le second membre de (24'') u par $h_1 + h_2 + \ldots + h_{p-1}$ et en gardant seulement les termes de degré p.

Au lieu de ($24''$) prenons l'équation

$$(24''_1) \qquad U = G_{01} V + \sum_{m+n \geqq 2} G_{mn} U^m V^n,$$

où figure au second membre une série majorante du second membre de ($24''$).

Il est élémentaire qu'on en tire U en fonction de V par une série

$$(26_1) \qquad U = H_1 V + H_2 V^2 + \ldots + H_p V^p + \ldots$$

convergente si V est assez petit et dont les coefficients sont tous positifs.

Or un terme $H_p V^p$ s'obtient à partir de ($24''_1$) par un calcul exactement parallèle à celui qui donnait $h_p[v; s]$ à partir de ($24''$). Tous les termes des divers types de la série qui figure au second membre de ($24''$) se retrouvent majorés dans ($24''_1$), de sorte que $H_p V^p$ majore $h_p[v; s]$. *La série* (26) *est régulièrement convergente et donne une solution de l'équation proposée si* $|v(s)|$ *est assez petit.* Cette solution est d'ailleurs une fonctionnelle de $v(t)$, continue au sens élémentaire.

19. Unicité. — S'il y avait une autre solution $u(s) + w(s)$, fonctionnelle de $v(s)$ s'annulant avec $v(s)$, on aurait

$$(27) \qquad w(s) = \sum_{m+n \geqq 2} \{ g_{mn}[u + w, v; s] - g_{mn}[u, v; s] \}.$$

Or, étant donné un monome fonctionnel quelconque $q_{mn}[u, v; s]$, si l'on développe $q_{mn}[u + w, v; s]$, on y retrouve $q_{mn}[u, v; s]$, de sorte que dans la différence $q_{mn}[u + w, v, s] - q_{mn}[u, v; s]$ tous les termes sont réunis par des signes +. Ces termes se retrouvent majorés dans la différence $Q_{mn}(U + W)^m V^n - Q_{mn} U^m V^n$, majorée elle-même par $m Q_{mn}(U + W)^{m-1} W V^n$.

Le second membre de (27) est donc inférieur en module à

$$W \sum_{m+n \geqq 2} m\, G_{mn} (U + W)^{m-1} V^n.$$

Prenons pour W le maximum du module de $w(t)$; U, V et W

étant choisis assez petits, la série $\sum\limits_{m+n\geqq 2} m G_{mn}(U+W)^{m-1}V^n$ aura une valeur numérique θ inférieure à 1. Dans ces conditions (27) entraînerait

$$|w(s)| < \theta W,$$

ce qui est absurde. Il y a donc unicité dans un voisinage d'ordre zéro des valeurs nulles des arguments $u(s)$ et $v(s)$.

IV. — LE CAS DU DÉTERMINANT NUL : LES ÉQUATIONS AUX RAMIFICATIONS.

20. Suivant toujours l'analyse de M. Schmidt, nous reprenons l'équation (24′) en supposant que, par division par $c(s)$, on se soit ramené au cas où $c(s)$ est égal à 1. L'équation s'écrit

$$(28)\qquad u(s)-\int_0^1 c(s,\, t)u(t)\,dt = f_{01}[v;\, s]+\sum_{m+n\geqq 2} f_{mn}[u,\, v;\, s]$$

et nous nous placerons dans le cas où le déterminant de Fredholm calculé à partir du noyau $c(s,\, t)$ est nul.

Les équations homogènes associées

$$\varphi(s)-\int_0^1 c(s,\, t)\varphi(t)\,dt = 0,$$

$$\psi(t)-\int_0^1 \psi(s)c(s,\, t)\,ds = 0$$

admettent alors des solutions fondamentales indépendantes (associées)

$$\varphi_1(s),\quad \varphi_2(s),\quad \ldots,\quad \varphi_r(s);\qquad \psi_1(t),\quad \psi_2(t),\quad \ldots,\quad \psi_r(t).$$

Soit alors le noyau

$$e(s,\, t) = c(s,\, t)+\sum_1^r {}_{\nu}\, p_\nu(s)q_\nu(t),$$

où les fonctions p_ν et q_ν sont supposées continues, respectivement linéairement indépendantes et peuvent d'ailleurs être réelles ou imaginaires ; nous allons établir que :

LEMME. — *Pour que le déterminant de Fredholm de $e(s,\, t)$ ne*

soit pas nul, il est nécessaire et suffisant qu'il n'existe ni une combinaison linéaire des $\varphi_i(s)$ orthogonale à tous les q_ν, ni une combinaison des $\psi_i(t)$ orthogonale à tous les p_ν.

En effet, soit l'équation

$$(29) \qquad u(s) - \int_0^1 e(s, t) u(t)\, dt = 0$$

qui, si le déterminant en question n'est pas nul, doit n'avoir d'autre solution que zéro. Elle s'écrit (notation p. 288).

$$(29') \qquad u(s) - \int_0^1 e(s, t) u(t)\, dt = \Sigma_\nu p_\nu(s).\overline{uq_\nu}.$$

Si elle a une solution non nulle, ou bien tous les $\overline{uq_\nu}$ sont nuls, mais alors cette solution est une combinaison linéaire des φ_i orthogonale à toutes les q_ν, ou bien l'équation (29') entraîne, en posant $\overline{uq_\nu} = A_\nu$ et par un calcul immédiat,

$$\sum_\nu A_\nu \overline{\psi_i p_\nu} = 0;$$

or ce sont là des équations du premier degré en A_ν dont le déterminant est forcément nul puisque les A_ν ne sont pas tous nuls; il existe alors des constantes C_i non toutes nulles telles que

$$\Sigma_i C_i \overline{\psi_i p_\nu} = 0;$$

cela donne une combinaison des ψ_i orthogonale à toutes les p_ν.

Incidemment notons que les conditions posées par le lemme reviennent à dire que, posant

$$A_{ik} = \overline{\psi_i p_k}, \qquad B_{ik} = \overline{\varphi_i q_k},$$

les déterminants qui ont pour éléments A_{ik} ou B_{ik} ne sont nuls ni l'un ni l'autre.

21. Revenons à (28). Il sera toujours facile de trouver des fonctions p et q satisfaisant aux conditions du lemme. Nous transformerons alors (28) comme au n° 10, mais en isolant au premier membre

$$u(s) - \int_0^1 e(s, t) u(t)\, dt,$$

puis résolvant cette équation de Fredholm comme si le second membre était connu.

Nous obtenons ainsi

$$(30)\quad u(s)=\sum_{i=1}^{r}\left(-p_i(s)+\int_0^1 \mathcal{G}(s,t)\,p_i(t)\,dt\right)x_i+g_{01}[v;s]+\sum_{m+n\geq 2}g_{mn}[u,v;s]$$

$\mathcal{G}$ étant le noyau résolvant de e et en posant

$$(31)\qquad x_i=\int_0^1 q_i(t)\,u(t)\,dt.$$

Laissons pour un instant les constantes x_i arbitraires, l'équation (30) se traitera exactement comme (24″) du paragraphe III. Le fait qu'il y figure, en plus de la fonction-argument $v(t)$, des variables ordinaires x_i n'introduit aucune difficulté. On aura la solution de forme

$$(32)\qquad u(s)=\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r+n\geq 1} x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r}\,h_n^{\alpha_1\ldots\alpha_r}\left[v(\overset{1}{\underset{0}{t}});s\right],$$

valable lorsque les x_i et $v(t)$ sont assez petits en module; les h_n désignant toujours des fonctionnelles homogènes, de degré n en $v(t)$, obtenues comme sommes de monomes des différents types.

22. Il reste à choisir les constantes x_i de façon à satisfaire les (31); il suffit d'y porter l'expression (32) et l'on a

$$(33)\qquad x_i=\sum_{\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_r\geq 1} L_i^{\alpha_1\ldots\alpha_r}x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r}$$
$$+\sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r\geq 0} x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 h_n^{\alpha_1\ldots\alpha_r}\left[v(\overset{1}{\underset{0}{t}});\zeta\right].q_i(\zeta)\,d\zeta,$$

les coefficients étant des constantes quand $v(s)$ est connue. Nous avons distingué dans (33) les termes venant des h_0 qui donnent des coefficients L indépendants de v et les autres termes, dont les coefficients sont des fonctionnelles de v.

Les termes du premier degré obtenus dans la première somme aux seconds membres disparaissent avec les premiers membres. On s'en rend compte de suite en remarquant que ces termes du premier degré

peuvent être évalués en remplaçant l'équation (30) par

$$(30') \qquad u(s)=\sum_{1}^{r}{}_i\left(-p_i(s)+\int_0^1 \mathcal{E}(s,\, t)p_i(t)\,dt\right)x_i.$$

Introduisons enfin un autre paramètre ε en remplaçant $v(t)$ par $\varepsilon\, v'(t)$. Les (33) s'écrivent

$$(34) \qquad \begin{aligned} 0 = & \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r \geqq 2} \mathrm{L}_i^{\alpha_1\ldots\alpha_r} x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r} \\ & + \sum_{\alpha_1+\ldots+\alpha_r \geqq 0} x_1^{\alpha_1}\ldots x_r^{\alpha_r} \sum_{1}^{\infty}{}_n \varepsilon^n \int_0^1 h_n^{\alpha_1\ldots\alpha_r}\left[(v' \overset{1}{\underset{0}{t}}); \zeta\right] q_i(\zeta)\,d\zeta. \end{aligned}$$

Ce sont des équations entre les variables ordinaires $x_1, \ldots, x_r$, ε, ne contenant, dans la première somme, que des termes de degré supérieur à 1 par rapport aux inconnues x_1, x_2, ..., x_r qu'il s'agit d'obtenir en fonction de ε. Le déterminant fonctionnel de ces équations est donc nul pour les valeurs nulles des variables et l'on se trouve dans le cas singulier des fonctions implicites ordinaires, cas qui a été l'objet des travaux classiques de Puiseux.

On sait qu'en général le système (34) définit plusieurs système des solutions $x_i(\varepsilon)$ (solutions nulles avec ε); en portant dans (32), on en déduira autant de solutions de l'équation fonctionnelle qu'il s'agissait de résoudre, solutions valables quand le module de $v(s)$ est assez petit.

Quand le déterminant de l'équation fonctionnelle est nul, on obtient donc, comme pour les équations définissant des fonctions implicites ordinaires, la multiplicité des solutions. La théorie donnée par Puiseux pour le dernier cas s'applique, comme on vient de le voir, aux équations fonctionnelles.

Les équations (34), qui ont un rôle fondamental dans la question, sont dites *équations aux ramifications*.

23. Précisons un peu dans le cas où le noyau $c(s, t)$ n'a qu'une fonction fondamentale. Il y a alors une seule équation aux ramifications

$$(34') \qquad \sum_{\alpha>2} \mathrm{L}^{\alpha} x^{\alpha} + \sum_{\alpha>0} x^{\alpha} \sum_{1}^{\infty}{}_n \varepsilon^n \int_0^1 h_n^{\alpha}\left[v' (\overset{1}{\underset{0}{t}}); \zeta\right] q(\zeta)\,d\zeta = 0.$$

Si $L^2, \ldots, L^{p-1}$ sont nuls, L^p n'étant pas nul, l'équation (34′) aura p solutions $x(\varepsilon)$ dans le domaine de l'origine, solutions réelles ou imaginaires, distinctes ou confondues. Il en sera de même pour l'équation proposée.

Il peut arriver que tous les L^α soient nuls; dans ce cas, pour $v(s) \equiv 0$, on peut garder le paramètre x arbitraire et l'équation fonctionnelle où l'on prend $v(s)$ nulle, à une infinité de solutions en $u(s)$; dans le cas où $v(s)$ n'est pas nulle, il faut poursuivre la discussion sur (34′).

V. — OBTENTION DE RÉSULTATS NON LOCAUX.

24. Les méthodes précédentes concernant les équations fonctionnelles

$$F\left[u\binom{1}{t}_{0},\ v\binom{1}{t}_{0};\ s\right] = 0 \tag{35}$$

donnent des résultats locaux : on prend un couple de fonctions $u_0(s)$, $v_0(s)$ vérifiant (35), et l'on étudie, comme nous l'avons vu, la résolution de (35) lorsque $u(s)$ et $v(s)$ restent dans des voisinages de $u_0(s)$ et $v_0(s)$.

Il est plus difficile d'obtenir, sauf pour des équations fonctionnelles de type particulier, des résultats non locaux.

D'intéressants développements à ce sujet ont été donnés par M. Leray [60]. Ils se rattachent directement à la méthode de Schmidt, et nous en donnerons une idée ici.

25. Admettons que, $u(s)$ étant toujours l'inconnue, la fonctionnelle F du premier membre de (35) fasse intervenir, ainsi que la donnée $v(s)$, un certain nombre de paramètres : deux pour fixer les idées, λ et μ. Il s'agit d'étudier l'ensemble des solutions de (35) quand le point (λ, μ), figuré géométriquement sur un plan auxiliaire, reste dans un domaine fermé D de ce plan.

Soit $u_0(s)$ une solution de (35) obtenue pour des valeurs λ_0, μ_0 des paramètres, le point (λ_0, μ_0) appartenant au domaine D. Admettons que l'on puisse toujours appliquer les méthodes précédentes à l'étude des solutions voisines de $u_0(s)$, obtenues pour des valeurs des paramètres voisines de λ_0, μ_0, c'est-à-dire dans un champ

$$|u(s) - u_0(s)| < \varepsilon_0, \qquad |\lambda - \lambda_0| < \eta_0, \qquad |\mu - \mu_0| < \zeta_0.$$

On aura éventuellement à écrire des équations aux ramifications

$$\Phi_i(\lambda, \mu, x_1, \ldots, x_r) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

qu'il faudra discuter. Le plus souvent ces équations (dans lesquelles $\lambda - \lambda_0$ et $\mu - \mu_0$ tiendront le rôle du paramètre ε du n° 22) définiront des multiplicités à deux dimensions, les x_i étant des fonctions uniformes des variables indépendantes λ et μ (voisines de λ_0 et μ_0); exceptionnellement, ces équations peuvent définir des multiplicités à plus de deux dimensions. Toute variété à deux dimensions donne une solution (que M. Leray dit *usuelle*), voisine de $u_0(s)$; une variété à plus de deux dimensions donnera une infinité de solutions (dites *exceptionnelles*).

Ceci posé, il faut, pour aller plus loin, introduire la condition suivante, *à vérifier sur l'équation* (35) :

L'ensemble des solutions étudiées est un ensemble fonctionnel compact et fermé.

Comme, dans ce qui précède, il était toujours question d'un voisinage élémentaire d'ordre zéro, la condition à vérifier sera la suivante :

Les solutions étudiées sont également bornées et également continues ([1]);

En ajoutant enfin la condition suivante :

Toute fonction limite d'une infinité de solutions de (35) *est aussi solution de* (35).

Sous ces hypothèses, on peut appliquer le théorème de Borel-Lebesgue ([2]) :

Les voisinages d'ordre zéro de toutes les solutions formant l'ensemble étudié peuvent être remplacés par un nombre fini d'entre eux. Et cela donne de suite des résultats non locaux.

On établit ainsi que le domaine ouvert correspondant à D est divisé en régions par un nombre fini d'arcs analytiques, régions telles que, dans chacune d'elles, le nombre des solutions exceptionnelles

---

([1]) *Cf.* Chap. II, n° 8, *b*.
([2]) *Ibid.*, n° 9.

soit nul ou infini, le nombre des solutions usuelles étant fini et constant.

La parité du nombre des solutions usuelles est la même dans toutes les régions de D. En particulier, si ce nombre est impair pour une région, l'équation admet forcément une solution quelle que soit la position du point (λ, μ) dans D.

On trouvera des applications de ce résultat dans le travail cité.

Une autre méthode pour établir l'existence des solutions se trouve développée dans un travail récent de MM. Leray et Schauder [61]. Elle repose sur l'extension, au cas fonctionnel, de la notion de *degré topologique* d'une transformation continue de l'espace à n dimensions. Nous aurons à y revenir au tome III du présent Ouvrage.

Signalons enfin un intéressant Mémoire de M. P. Lévy [64] qui donne des conditions pour que l'inversion d'une transformation fonctionnelle soit toujours possible et univoque.

VI. — LE CAS DES LIMITES VARIABLES.

26. Signalons d'abord plusieurs travaux de M. L. Pomey, qui étudie des équations non linéaires où figurent des intégrales multiples avec une limite supérieure d'intégration variable [88]. Ces travaux concernent aussi des équations intégro-différentielles et nous aurons à y revenir.

Dégageons seulement ici la notion d'équation dite « normale ». Elle concerne le cas où le domaine d'existence des solutions comprend en entier le domaine où sont définies les données, et c'est un cas qui est évidemment particulièrement intéressant. Du point de vue de M. Pomey, les équations différentielles linéaires sont « normales ».

Prenons, par exemple, une équation du type suivant :

$$(36) \quad \varphi(x, y) = f(x, y) + \lambda \int_a^x dt_1 \ldots \int_a^{t_{m-1}} dt_m \times \int_b^y dv_1 \ldots \int_b^{v_{p-1}} dv_p \, \mathrm{P}[x, y, t_m, v_p, \varphi(t_m, v_p)],$$

a, b, x, y étant des nombres complexes et $\varphi(x, y)$ étant la fonction inconnue. On suppose que $f(x, y)$ est holomorphe quand les

variables x, y sont intérieures à des aires D_x, D_y des plans complexes correspondants, aires contenant les points a et b et les chemins d'intégration (a, x), (b, y), d'ailleurs arbitraires. Admettons pour fixer les idées que P soit un polynome en φ dont les coefficients sont holomorphes quand les variables x, t_m et y, v_p sont dans D_x et D_y et que l'on peut évidemment supposer sans terme constant.

La solution de (36) est immédiate par une série des puissances de λ

$$\varphi = \varphi_0 + \lambda\varphi_1 + \ldots + \lambda^n \varphi_n(x, y) + \ldots$$

et

$$|\varphi_n(x, y)| < A^{n+1}\left(\frac{s^m \sigma^p}{m!\,p!}\right)^n,$$

s et σ étant les longueurs des chemins d'intégration (a, x) et (b, y), pris les plus courts possibles dans D_x et D_y. Si l et l' sont les maxima de s et σ pour tous les couples (a, x) et (b, y) intérieurs respectivement à D_x et D_y, l'équation sera normale si

$$\lambda A\, l^m l'^p < m!\,p!,$$

inégalité toujours vérifiée si *le nombre des intégrations $m+p$ est assez grand.*

27. Cas où l'équation aux variations est une équation de Volterra. — Une classe notable d'équations fonctionnelles sera celle des équations qui donnent, pour équation aux variations, une équation de Volterra de seconde espèce. Le déterminant sera toujours différent de zéro et la solution sera bien déterminée.

Prenons une fonctionnelle ne dépendant des valeurs de l'argument inconnu $y(t)$ que pour $0 \leqq t \leqq x$. Nous devons logiquement nous attendre à nous trouver dans le cas qui vient d'être envisagé, de sorte que, sous des conditions assez larges, une relation telle que

$$F\left[y\left(\overset{x}{\underset{0}{t}}\right), x\right] = z(x)$$

ne pourra avoir plus d'une solution. C'est ce qu'a montré M. Sabbatini [1].

Résumons brièvement sa démonstration dans le cas où la fonctionnelle F est du second degré et régulière, c'est-à-dire dans le cas de

(1) SABBATINI, [96, 97].

l'équation

$$(37)\quad y(x)+\int_0^x K_1(x,t)\,y(t)\,dt + \int_0^x\int_0^x K_2(x,t_1,t_2)\,y(t_1)\,y(t_2)\,dt_1\,dt_2 = z(x).$$

S'il existait deux solutions $y_1(x)$, $y_2(x)$, en posant

$$u = y_1 - y_2,$$

nous aurions

$$u(x)+\int_0^x K_1(x,t)\,u(t)\,dt+\int_0^x\int_0^x K_2(x,t_1,t_2)\,y_1(t_1)\,u(t_2)\,dt_1\,dt_2 + \int_0^x\int_0^x K_2(x,t_1,t_2)\,y_2(t_2)\,u(t_1)\,dt_1\,dt_2 = 0,$$

c'est-à-dire, en admettant K_2 symétrique en t_1 et t_2 (ce qui est toujours permis), et en posant

$$H(x,t) = K_1(x,t)+\int_0^x K_2(x,t_1,t)\,[y_1(t_1)+y_2(t_1)]\,dt_1,$$

$$u(x)+\int_0^x H(x,t)\,u(t)\,dt = 0;$$

c'est une équation de Volterra qui n'a d'autre solution que $u(x)\equiv 0$, d'où

$$y_1(x) = y_2(x).$$

Nous renvoyons au travail de M. Sabbatini pour l'étude du champ d'existence de la solution de (37).

28. Équations intégrales formées avec des compositions. — Dès le début de l'étude des équations intégrales linéaires, nous avons vu l'avantage qu'il y avait à introduire l'*opération de composition* (à limites variables ou à limites fixes).

Il y a intérêt à étudier à part la catégorie très étendue d'équations intégrales non linéaires (à limites variables ou à limites fixes) qu'on obtient par composition des fonctions inconnues et de fonctions connues. M. Volterra les a envisagées systématiquement, et il a montré comment leur étude se reliait très étroitement et très simplement à celle des équations qui, dans l'analyse ordinaire, définissent les fonctions implicites. Il a prolongé la théorie en établis-

sant un lien analogue entre les équations différentielles et les équations intégro-différentielles de compositions.

Le développement de ces divers sujets se trouvera dans le volume suivant du présent Ouvrage ([1]).

29. Nous aurons aussi à revenir ultérieurement sur quelques résultats concernant l'inversion des transformations fonctionnelles générales et, en particulier, sur les équations où figurent des intégrales de Stieltjes. Nous donnerons enfin au volume suivant, après l'étude des opérations de composition, divers détails sur la résolution numérique des équations intégrales, soit directement, soit par utilisation d'appareils [méthodes mécaniques ([2])].

Les relations entre la théorie des équations intégrales et d'autres branches des mathématiques n'ont pu être envisagées ici et nous avons laissé de côté les nombreuses applications. Ces divers sujets trouveront place dans le troisième volume ([3]).

([1]) *Cf.* sur ce sujet : Volterra, [113] de la bibliographie I ; Volterra et Pérès, [133].

([2]) *Cf.* [75′] et [75″].

([3]) Signalons du moins, dès maintenant, de curieux résultats de M. Galbrun [31′] sur le rôle inattendu que jouent, dans certaines questions de probabilités, des formules relatives à la résolution des équations intégrales linéaires.

BIBLIOGRAPHIE.

(LIVRE I.)

---

1. Arzelà (C.). — Funzioni di linee (*Rend. Ac. Lincei*, 4e série, t. 5, 1889).
2. » . — Sulle funzioni di linee (*Mem. Ac. Sc. Bologna*, 5e série, t. 5, 1895).
3. » . — Sul principio di Dirichlet (*Rend. Ac. Sc. Bologna*, nouvelle série, t. 1, 1896-1897).
4. » . — Sull'inversione di un sistema di funzioni (*Id.*, t. 7, 1902-1903).
5. » . — Sul limite di un integrale doppio (*Id.*, t. 12, 1907-1908).
6. » . — Su alcune questioni di calcolo funzionale (*Mem. Ac. Sc. Bologna*, 6e série, t. 7, 1910).
7. Ascoli (G.). — Le curve limiti di una varietà data di curve (*Mem. Ac. Lincei*, 3e série, t. 18, 1883).
8. Baire (R.). — *Leçons sur les fonctions discontinues* (Coll. Borel, Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1905).
9. Borel (E.). — *Leçons sur la théorie des fonctions* (3e édition, Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1928).
10. Bouligand (G.). — Sur les modes de continuité de certaines fonctionnelles (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 47, 1923).
11. Bourlet (C.). — Sur les opérations en général et les équations différentielles d'ordre infini (*Ann. École Normale supér.*, 3e série, t. 14, 1897).
12. Conforto (F.). — Sopra il calcolo differenziale assoluto negli spazi funzionali continui (*Ann. Scuola Normale super. Pisa*, 2e série, t. 2, 1933).
13. Courant (R.). — Über eine neue Klasse von kov. Funktionalausdrucken welche aus Variationsproblemen entspringen (*Gött. Nachr.*, 1925).
14. Daniele (E.). — Formole di derivazione funzionale (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 24_1, 1915).
15. » . — Sulle derivate delle funzioni di linee inverse (*Atti Ac. Gioenia*, Catania, 5e série, t. 8, 1915).
16. Daniell (P. J.). — A general form of Integral (*Annals of Math.*, 2e série, t. 19, 1918).
17. » . — Integrals in an infinite number of dimensions (*Id.*, t. 20, 1918-1919).
18. » . — Functions of limited variation in an infinite number of dimensions (*Id.*, t. 21, 1919-1920).
19. Daniell (P. J.). — The derivative of a functional (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 2e série, t. 25, 1919).

20. Dienes (P.). — Versuch einer syst. Begruendung der Funktionalrechnung (*Math. ès Term. Ertesitö*, Budapest, t. 34, 1916).

21. Du Bois-Reymond (P.). — Erläuterungen zu den Anfangsgründen der Variationsrechnung (*Math. Ann.*, t. 15, 1879).

22. Evans (G. C.). — Topics from theory and applic. of functionals, including integral equations (*Amer. Math. Soc.*, Cambridge Colloquium, 1918).

22'. » . — An extension of Hadamard's formula for a linear functional (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 2e série, t. 23, 1917).

23. Fabri (C.). — Sopra alcune proprietà generali delle funzioni che dipendono da altre funzioni (*Atti Ac. Torino*, t. 25, 1890).

24. » . — Sopra le funzioni di iperspazii (*Atti Ist. Veneto*, 7e série, t. 4, 1893).

25. Fantappiè (L.). — Le calcul des matrices (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 186, 1928).

26. » . — Gli operatori funzionali e il calcolo delle matrice infiniti nelle teoria dei Quanti (deux notes, *Rend. Ac. Lincei*, 6e série, t. 8, 1928; t. 9, 1929).

27. » . — I funzionali analitici (*Mem. Ac. Lincei*, 6e série, t. 3, 1930).

28. Fischer (C. A.). — Functions of Surfaces with exceptional points or curves (*Amer. Journ. of Math.*, t. 38, 1916).

29. » . — Note on the order of continuity of functions of lines (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 23, 1916-1917).

30. » . — Linear functionals of n-space (*Id.* et *An. of Math. Princeton Univ.*, 2e série, t. 19, 1917).

31. » . — On bilinear and n-linear functionals (*Id.* et *Proc. Nat. Ac. Sc.*, t. 3, 1917).

32. » . — Necessary and suf. conditions that a linear transf. be completely continuous (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 27, 1920-1921).

33. Fréchet (M.). — Sur les opérations linéaires (trois notes, *Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 5, 1904; t. 6, 1905; t. 8, 1907).

34. » . — Généralisation d'un théorème de Weierstrass (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 139, 1904).

35. » . — Sur quelques points de calcul fonctionnel (*Thèse*, Paris, 1906 et *Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 22, 1906).

36. » . — Les fonctions d'une infinité de variables (*C. R. Congr. Soc. sav.*, 1909).

37. » . — Sur les fonctionnelles continues (*Ann. École Normale supér.*, 3e série, t. 27, 1910).

38. » . — Sur la notion de différentielle dans le calcul fonctionnel (*C. R. Congr. Soc. sav.*, 1912).

39. » . — Sur les fonctionnelles linéaires et l'intégrale de Stieltjes (*C. R. Congr. Soc. sav.*, 1913).

40. » . — Sur la notion de différentielle d'une fonction de ligne (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 15, 1914).

41. » . — Sur l'intégrale d'une fonctionnelle étendue à un ensemble abstrait (*Bull. Soc. Math. France*, t. 43, 1915).

42. FRÉCHET (M.). — Sur les fonctionnelles bilinéaires (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 16, 1915).
43. » . — L'écart de deux fonctions (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 162, 1916).
44. » . — Le théorème de Borel dans la théorie des ensembles abstraits (*Bull. Soc. Math. France*, t. 45, 1917).
45. » . — Sur divers modes de convergence d'une suite de fonctions (*Bull. Calcutta Math. Soc.*, t. 11, 1924).
46. » . — Prolongement de fonctionnelles continues sur un ensemble abstrait (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 48, 1924).
47. » . — Les ensembles compacts de fonctions mesurables (*Fundamenta*, t. 9, 1927).
48. » . — *Les espaces abstraits* (Coll. Borel, Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1928).
49. » . — *Notice sur les travaux scientifiques* (Paris, 1933).
50. GATEAUX (R.). — Sur les représentations des fonctionnelles continues (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 22_2, 1913).
51. » . — Sur les fonctionnelles continues et les fonctionnelles analytiques (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 157, 1913).
52. » . — Sur la représentation des fonctionnelles continues (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 23_1, 1914).
53. » . — Représentation d'une fonctionnelle continue satisfaisant à la condition du cycle fermé (*Id.*).
54. » . — Sur les fonctionnelles d'un ordre entier d'approximation (*Id.*).
55. » . — Sur la notion d'intégrale dans le domaine fonctionnel, et sur la théorie du potentiel, avec Note de M. P. Lévy (*Bull. Soc. Math. France*, t. 47, 1919).
56. » . — Fonctions d'une infinité de variables indépendantes, avec Note de M. P. Lévy (*Id.*).
57. » . — Sur diverses questions de calcul fonctionnel (*Id.*, t. 50, 1922).
58. GRAVES (L. M.). — Topics in the functional calculus (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 41, 1935).
59. HADAMARD (J.). — Sur les dérivées des fonctions de ligne (*Bull. Soc. Math. France*, t. 30, 1902).
60. » . — Sur les opérations fonctionnelles (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 136, 1903).
61. » . — *Leçons sur le calcul des variations* (Paris, 1910).
62. » . — Le calcul fonctionnel (*Enseign. Math.*, t. 14, 1912).
63. HEISENBERG (W.) et PAULI (W.). — Zur Quantendynamik der Wellenfelder (*Zeits. f. Physik*, t. 56, 1929).
64. HELLY (E.). — Ueber lineare Funktionaloperationen (*Sitz. Ak. Wiss. Wien*, t. 121, 1912).
65. HILDEBRAND (T. H.). — A contribution to the foundations of Frechet's Calcul fonctionnel (*Amer. Journ. Math.*, t. 26, 1912).

66. Hilbert (D.). — Ueber das Dirichlet'sche Prinzip (*Jahresber. Deutsche Math. Verein*, 1900; *Festschr. Feier 150-jähr. Best. K. Ges. Wiss. Göttingen*, 1901).

67. Kakeya (S.). — On linear operations and some groups of continuous functions (*Sc. Rep. Tohoku Univ.*, t. 4, 1915).

68. » . — Theory of analytic functions of lines (*Id.*, t. 6, 1917).

69. » . — On functions of lines and a set of curves (*Id.*, t. 7, 1918).

70. Lebesgue (H.). — *Leçons sur l'intégration* (Coll. Borel, Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1904).

71. Le Stourgeon (E.). — Minima of functions of lines (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 21, 1920).

72. Levi (E. E.). — Funzioni di linee (*Boll. di Bibl. e Storia delle Sc. Mat.*, 1915).

73. Lévy (P.). — Sur les dérivées des fonctions des lignes planes (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 152, 1911).

74. » . — Sur la notion de moyenne dans le domaine fonctionnel (*Id.*, t. 169, 1919).

75. » . — *Leçons d'Analyse fonctionnelle* (Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1922).

76. » . — Sur la dérivation et l'intégration généralisées (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 47, 1923).

77. » . — *Analyse fonctionnelle* (*Mémorial Sc. math.*, fasc. 5, 1925).

78. Moore (E. H.). — Introduction to a form of general analysis (*Newhaven Math. Colloquium*, 1910; *Bull. Amer. Math. Soc.*, 2e série, t. 12, 1906).

79. Nalli (P.). — Sulle operazioni funzionali lineari (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 47, 1922).

80. Pascal (E.). — Sui principi della teoria delle funzioni di linee; Gli integrali riemanniani delle funzioni di linee; Le formole di Green e Stokes per le funzioni di linee (quatre notes, *Rend. Ac. Napoli*, 3e série, t. 20, 1914).

81. » . — Le linee funzioni di linee (*Giorn. di Mat.*, t. 53, 1915).

82. Picone (M.). — Le equazioni alle variazioni per cause pertubatrici variabili nel concetto di Volterra di variazione prima per una funzione di linea (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 28_2, 1919).

83. » . — Sulle funzioni additive di campo (*Id.*, t. 28_1, 1919).

84. Pincherle (S.). — Sulle op. funzionali distributive (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 4_1, 1895). *Cf.* aussi *Le operazioni distributive e loro applicazioni all' analisi* (en collab. avec U. Amaldi, Bologne, 1901).

85. » . — Mémoire sur le calcul fonctionnel distributif (*Math. Annalen*, t. 49, 1897).

86. Radon (F.). — Theorie u. Anwend. der abs. additiven Mengenfunktionen (*Ber. Ak. Wiss. Wien*, t. 112, 1913).

87. » . — Ueber lineare Funktionaltransf. u. Funktionalgleich. (*Id.*, t. 128, 1919).

88. Rasor (S. E.). — On the integration of Volterra's derivatives (*Bull. Amer. Math. Soc.*, t. 22, 1916).

89. Riesz (F.). — Stetigkeitsbegriff u. abst. Mengenlehre (*Atti IV. Congresso mat.*, t. 2, Rome, 1909).

90. » . — Sur les opérations fonctionnelles linéaires (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 149, 1909).

91. » . — Sur certains systèmes d'équations fonctionnelles et l'approximation de fonctions continues (*Id.*, t. 150, 1910).

92. » . — Sur certains systèmes singuliers d'équations intégrales (*Ann. École Normale supér.*, t. 28, 1911).

93. » . — Sur l'intégrale de Lebesgue (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 154, 1912 et *Acta Mat.*, t. 42, 1920).

94. » . — *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues* (Coll. Borel, Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1913).

95. » . — Sur les fonctionnelles linéaires (*Ann. École Normale supér.*, t. 31, 1914).

96. » . — Ueber lineare Funktionalgleich. (*Acta Mat.*, t. 41, 1918).

97. Sierpinsky (W.). — Convergence en mesure (*Fundamenta Mat.*, t. 9, 1927).

98. Steinhaus (A.). — Additive u. Stetige Funktionaloper. (*Math. Zeits.*, t. 5, 1919).

99. Tonelli (L.). — Sulle funzioni di linee (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 23_1, 1916).

100. » . — La semicontinuità nel Calcolo delle variazioni (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 44, 1920).

101. » . — *Fondamenti di Calcolo delle variazioni* (deux volumes, Bologne, 1921 et 1923).

102. Tricomi (F.). — Sull' iterazione delle funzioni di linee (*Giorn. di Mat.*, t. 55, 1917).

103. » . — Sulle serie di funzioni di linee (*Rend. Ac. Napoli*, 3e série, t. 26, 1920).

104. » . — Le serie di potenze nel campo delle funzioni di linee (*Id.*)

105. Vallée-Poussin (C. de La). — *Intégrale de Lebesgue. Fonction d'ensemble. Classes de Baire* (Coll. Borel, Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1916).

106. Van Dantzig (D.). — La notion de dérivée d'une fonctionnelle (*C. R. Acad. Sc.*, t. 201, 1935).

107. Vessiot (E.). — Sur la théorie des multiplicités et le calcul des variations (*Bull. Soc. Math. France*, t. 40, 1912).

108. Volterra (V.). — Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni (trois notes, *Rend. Ac. Lincei*, 4e série, t. 3_2, 1887).

109. » . — Sopra le funzioni dipendenti da linee (deux notes, *Id.*).

110. » . — Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del Calcolo delle variazioni (*Rend. Ac. Lincei*, 4e série, t. 6_1, 1890).

111. » . — *Leçons sur l'intégration des équations différentielles aux dérivées partielles*, Stockholm, 1906 (Upsala, 1906, réimpression, Paris, 1912).

112. » . — *Trois leçons sur quelques progrès récents de la Physique mathématique* (*Lectures at the 20 th anniv. Clark Univ. Worcester, Mass.*, 1909) (Trad. allemande, Leipzig, 1914).

113. Volterra (V.). — *Leçons sur les fonctions de lignes* (Coll. Borel, Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1913).
114. » . — Les problèmes qui ressortent du concept de fonction de ligne (*Sitzungsber. Berliner Math. Ges.*, XIII J., 6 Sitz., 1914).
115. » . — Sulle equazioni alle derivate funzionali (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 23_1, 1914).
116. » . — *Saggi scientifici. L'evoluzione delle idee fondamentali del Calcolo infinitesimale. L'applicazione del calcolo ai fenomeni d'eredità* (N. Zanichelli, éditeur, Bologne, 1924).
117. » . — Sulla meccanica ereditaria (*Rend. Ac. Lincei*, 6e série, t. 11, 1930).
118. » . — *Le calcul des variations, son évolution et ses progrès, son rôle dans la Physique mathématique* (Conférences à Prague et à Brno, 1931).
119. Weierstrass (K.). — Ueber die analytische Darstellbarkeit sog. wilk. Funktionen reeller Arg. (*Math. Werke*, t. 3, Berlin, 1903).
120. Wiener (N.). — Differential spaces (*Public. of the Mass. Inst. of Techn.*, 2e série, n° 60, 1923).
121. Winter (M.). — Les principes du calcul fonctionnel (*Rev. de Métaphys. et Morale*, t. 21, 1913).
122. Wishneswky (L. A.). — The absolute extremum of certain polinomial functional (*Proc. lab. Cauric-Univ.*, t. 1, 1920).

(LIVRE II.) ([1]).

1. Abel (N. H.). — Résolution d'un problème de Mécanique (*Œuvres*, t. 1, p. 97).
2. » . — Solutions de quelques problèmes à l'aide d'intégrales définies (*Id.*, p. 113).
3. Adams (C. R.). — Note on integro-q-difference equations (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 31, 1929).
4. Bennett (A. C.). — Newton's method in general analysis (*Proc. Nat. Ac. of Sc.*, t. 2, 1916).
5. Bernstein (F.). — Die Integralgleichung der elliptischen Thètanullfunktion (*Berlin. Ber.*, 1920).
6. Bertrand (G.). — La théorie des marées et les équations intégrales (*Ann. École Normale supér.*, 3e série, t. 40, 1923).
7. Block (H.). Sur la solution de certaines équations fonctionnelles (*Arkiv. for Math. Astr. och Fys.*, t. 3, n° 22, 1907).

(1) Il ne peut être question de donner ici une bibliographie complète sur les équations intégrales. Le lecteur trouvera d'autres indications bibliographiques dans les Ouvrages cités (*Cf.*, par exemple [18-20]).

8. Bôcher (M.). — *An Introduction to the Study of Integral Equations* (Cambridge 1909; 2e édition, 1914).
9. Browne (P. J.). — Integral Equation proposed by Abel (*Proc. R. Irish Ac.*, t. 32, 1915).
10. » . — Sur quelques cas singuliers de l'équation de Volterra (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 154, 1912).
11. Bucht (G.). — Ueber nichtlinearen Integralgleich. mit unverzweigten Lösungen (*Ark. f. Math. Astr. och Fys.*, t. 8, n° 8, 1912).
12. Burgatti (M.). — Sull' inversione degli integrali definiti (deux notes, *Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 12_2, 1903).
13. Carleman (T.). — Sur le genre du déterminant D (λ) de Fredholm (*Ark. f. Math. Astr. och Fys.*, t. 12, n° 15, 1917).
14. » . — Zur theorie der linearen integralgleichungen (*Math. Zeits.*, t. 9, 1921).
15. » . — Sur les équations int. singulières (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 171, 1920).
16. » . — Sur la résolution de certaines équations intégrales singulières (*Ark. f. Math. Astr. och Fys.*, t. 16, n° 26, 1922).
17. Cotton (E.). — Équations différentielles et équations intégrales (*Bull. Soc. Math. France*, t. 38, 1910).
18. Davis (H. T.). — The present status of int. equations (*Indiana Univ. Stud.*, t. 13, n° 70, 1926).
19. » . — A survey of methods for the inversion of integrals of Volterra type (*Id.*, t. 14, nos 76-77, 1927).
20. » . — The Theory of the Volterra integral equation of second kind (*Id.*, t. 17, nos 88-90, 1930).
21. Dixon (A. C.). — Note on functional eq. which are limiting forms of integral eq. (*Proc. London Math. Soc.*, t. 17, 1919).
22. Egoroff (D. Th.). — Sur quelques points de la théorie des équations intégrales à limites fixes (*C. R. Acad. Sc.*, *Paris*, t. 186, 1928).
23. Evans (G. C.). — The integral eq. of the second kind of Volterra, with singular kernel (*Bull. Amer. Math. Soc.*, 2e série, t. 16, 1909).
24. » . — Volterra's integral eq. of the second Kind with discontinuous kernel (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 11, 1910; t. 12, 1911).
25. » . — L'equazione integrale di Volterra di seconda specie con un limite dell' integrale infinito (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 20_1, 1911).
26. » . — Sul calcolo del nucleo dell' eq. risolvente per una data equazione integrale (*Id.*).
27. » . — Some general types of functional equations (*Intern. Congr. of Math.*, Cambridge, 1912).
28. Fantappiè (L.). — Risoluzione di una classe d'equazioni integrali di 1a specie a limiti costanti (*Rend. Ac. Lincei*, 6e série, t. 1, 1925).
29. Fischer (E.). — Sur la convergence en moyenne (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 144, 1907).

30. Fredholm (I.). — Sur une classe d'équations fonctionnelles (*Acta Mat.*, t. 27, 1903).
31. Fubini (G.). — Equazioni integrali e valori eccezionali (*Ann. di Mat.*, 3e série, t. 17, 1910).
31'. Galbrun (H.). — *Théorie mathématique des assurances* (fasc. IV, V, VI du tome III du *Traité du Calcul des probabilités* de E. Borel; Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1933-1934).
32. Giraud (G.). — Équations à intégrales principales (*Ann. École Normale supér.*, 3e série, t. 51, 1934).
33. Giraud (G.), Bouligand (G.) et Delens (P.). — *Le problème de la dérivée oblique en théorie du potentiel* (Paris, 1935).
34. Goursat (E.). — Sur un problème relatif à la théorie des équations aux dérivées partielles (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 2e série, t. 5 et 6, 1903).
35. » . — Sur un cas élémentaire de l'équation de Fredholm (*Bull. Soc. Math. France*, t. 35, 1907).
36. » . — Recherches sur les équations intégrales linéaires (*Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 2e série, t. 10, 1908).
37. » . — *Cours d'Analyse mathématique*, t. 3 (Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1923).
37'. Hadamard (J.). — Résolution d'une question relative aux déterminants (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 17, 1893).
38. » . — *La série de Taylor et son prolongement analytique* (Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1901).
39. » . — Transformations ponctuelles (*Bull. Soc. Math. France*, 1905).
40. Heywood (H. B.). — Sur l'équation fonctionnelle de Fredholm (*Journ. de de Math.*, 1908).
41. Heywood et Fréchet (M.). — *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique* (Paris, 1912).
42. Hilbert (D.). — Grunzüge einer allg. Theorie der linearen Integralgleichungen (*Gött. Nachr.*, math. phys. klasse, 1904-1908 et un volume, Leipzig, 1912).
43. Hille (E.) et Tamarkin (J. D.). — On the theory of integral equations (*Ann. of Math.*, t. 31, 1930).
44. Holmgren (H.). — Om differential Kalkylen med indices af hvad Natur som helst (*Ak. Handl. Stockholm*, t. 5, 1863-1864).
45. Holmgren (E. A.). — Sur un théorème de M. Volterra (*Atti Ac. Torino*, t. 35, 1900).
46. Horn (I.). — Volterra'schen Integralgleichungen u. Summengleich. (*J. für d. reine und angew. Math.*, t. 140, 1911).
47. » . — Ueber nichtlinearen Integralgleich. vom Volterra'schen Typus (*Deuts. Math. Verein.* t. 27, 1918).
48. » . — Singuläre Systeme linearen Volterra'schen Integralgleich. (*Math. Zeitschr.*, t. 3, 1919).
49. Ince (E. P.). — On the connexion between linear diff. equation and int. equations (*Proc. R. Soc. Edimburgh*, t. 42, 1921-1922).

50. Kakeya (S.). — On an infinite number of linear integral equations (*Sc. Rep. Tohoku Univ. Sendai*, t. 5, 1916).

51. Kostitzin (V. A.). — Sur les solutions singulières des équations intégrales du cycle fermé (*Recueil Math.*, Moscou, t. 33, 1926).

52. » . — Sur les solutions singulières des équations intégrales de Volterra (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 184, 1927).

53. Lalesco (T.). — Sur l'équation de Volterra (*Journ. de Math.*, 2e série, t. 1, 1908).

54. » . — Sur une équation intégrale du type de Volterra (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 152, 1911).

55. » . — *Introduction à la théorie des équations intégrales* (Hermann, éditeur, Paris, 1912).

56. Lauricella (G.). — Sopra gli sviluppi in serie di funzioni ortogonali (*Rend. Circ. Mat. di Palermo*, t. 29, 1910).

57. » . — Sopra alcune equazioni integrali (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 17_1, 1908).

58. » . — Sull' equazione integrale di 1a specie (*Id.*, t. 18_2, 1909; t. 20_1, 1911).

59. Lebesgue (H.). — Sur la méthode de M. Goursat pour la résolution de l'équation de Fredholm (*Bull. Soc. Math. France*, t. 36, 1908).

60. Leray (J.). — Étude de diverses équations intégrales non linéaires (*Journ. de Math.*, 9e série, t. 12, 1933).

61. Leray (J.) et Schauder (J.). — Topologie et équations fonctionnelles (*Ann. École Normale supér.*, 3e série, t. 51, 1934).

62. Le Roux (F.). — Sur les intégrales des équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes (*Ann. École Normale supér.*, 3e série, t. 12, 1895).

63. Levi-Civita (T.). — Sull' inversione degli integrali definiti nel campo reale (*Atti Ac. Torino*, t. 31, 1895).

64. Lévy (P.). — Sur les fonctions de lignes implicites (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 168, 1919 et *Bull. Soc. Math. France*, t. 48, 1920).

65. Liouville (J.). — Mémoire sur quelques questions de Géométrie et de Mécanique et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions (*Journ. École Polytechn.*, t. 21, 1832).

66. » . — Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques (*Id.*).

67. » . — Mémoire sur l'intégration d'une équation à l'aide des différentielles à indices quelconques (*Id.*).

68. Love (C. E.). — Singular equations of Volterra type (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 15, 1914).

69. Mandelbrojt (S.). — Sulla generalizzazione del calcolo delle variazioni (*Rend. Ac. Lincei*, 6e série, t. 1, 1925).

70. Marty (J.). — Sur une équation intégrale (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 150, 1910).

71. » . — Existence de solutions singulières pour certaines équations de Fredholm (*Id.*).

72. » . — Valeurs singulières d'une équation de Fredholm (*Id.*).

73. MOLINARI (A. M.). — Derivazione a indice qualunque (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 25_2-26_2, 1916-1917).

74. MÜNTZ (Ch. H.). — *Équations intégrales*, t. 1; *équations de Volterra* (en russe, Moscou, 1934).

75. MYLLER (A.). — Randwertaufgaben bei hyperbolischen Differentialgleichungen (*Math. Ann.*, t. 68, 1910).

75′. NESSI (A.) et NISOLLE (L.). — *Appareils pour le calcul mécanique de l'intégrale d'un produit* (Dunod, éditeur, Paris, 1932).

75″. PASCAL (E.). — *I miei integrafi per equazioni differenziali* (Napoli, 1914).

76. PÉRÈS (J.). — Les fonctions d'ordre quelconque et leur composition (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 26_1, 1917, deux notes).

76′. » . — Sur l'équation de Volterra singulière (*Ann. Sc. Normale Pisa*, 2e série, t. 5, 1936).

77. PICARD (E.). — Sur une équation fonctionnelle (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 139, 1904).

78. » . — Sur une équation fonctionnelle se présentant dans la théorie des équations aux dérivées partielles (*Id.*, t. 144, 1907).

79. » . — Quelques remarques sur les équations intégrales de première espèce et certains problèmes de Physique mathématique (*Id.*, t. 148, 1909).

80. » . — Sur les équations intégrales de première espèce (*Id.*).

81. » . — Sur les équations intégrales de troisième espèce (*Ann. École supér.*, 3e série, t. 28, 1911).

82. » . — Sur un exemple simple d'équation intégrale singulière de Fredholm (*Id.*).

83. PICONE (M.). — Sopra un equazione integrale di 1a specie a limiti variabili considerata da Volterra (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 19_2, 1910).

84. » . — Sulle equazioni alle derivate parziali del second' ordine del tipo iperbolico (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 30, 1910).

85. POINCARÉ (H.). — Remarques diverses sur l'équation de Fredholm (*Acta Math.*, t. 33, 1910).

86. » . — *Leçons de Mécanique céleste*, t. 3, p. 253-256 (Paris, 1910).

87. POLI (C.). — Un teorema di esistenza per equazioni integrali non lineari (*Atti Ac. Torino*, t. 51, 1915-1916).

88. POMEY (L.). — Existence d'équations différentielles et intégrales normales non linéaires (*C. R. Acad. Sc.*, t. 185, 1927).

89. POPOVICI (C.). — Sur une équation fonctionnelle (*C. R. Acad. Sc., Paris*, t. 158, 1914).

90. » . — Les équations fonctionnelles et leur parallélisme avec les équations différentielles (*Bull. Sc. Math.*, 2e série, t. 53, 1929).

91. » . — Sur les équations intégro-fonctionnelles (deux notes, *Rend. Ac. Lincei*, 6e série, t. 2, 1930).

92. PRASAD (G.). — On the numerical sol. of integral equations (*Abst. Intern. Congress of Toronto*, 1924).

93. Riemann (B.). — Versuch einer allg. Auffassung der Integration u. Differentiation (1847; *ges. math. Werke*, Leipzig, 1892; *Œuvres mathémathiques*, Paris, 1898).

94. Riesz (F.). — Sur les systèmes orthogonaux de fonctions (*C. R. Acad. Sc.*, t. 144, 1907).

95. » . — Ueber lineare funktionalgleichungen (*Acta Math.*, t. 41, 1918).

96. Sabbatini (A.). — Sull' unicità della soluzione delle equazioni integrali a limiti variabili (*Rend. Ac. Lincei*, 6e série, t. 9, 1925).

97. » . — Sulle equazioni integrali quadratiche a limiti variabili (*Id.*).

98. Sbrana (F.). — Sopra certe equazioni integrali considerate dal prof. Tedone (*Id.*, 5e série, t. 30_2, 1921).

99. » . — Sopra alcune formole di risoluzione di certe equazioni integrali di Volterra (*Id.*, t. 31_1, 1922).

100. » . — Sopra certe equazioni integrali di Volterra risolubili con procedimenti finiti (*Id.*; t. 32, 1923).

101. Scatizzi (P.). — Soluzione di qualche tipo di equazioni differenziali ad indice qualunque (*Id.*, t. 31_2 1922 et 32_2, 1923).

102. Schmidt (E.). — Entwick. willkürliche Funktionen nach systemen vorgesch. (*Math. Ann*, t. 63, 1906).

103. » . — Zur Theorie der linearen u. nichtlinearen Integralgleichungen (*Math. Ann.*, t. 63, 64, 65, 1906-1907-1908).

104. Schur (I.). — Ueber die characteristichen Wurzeln mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen (*Math. Ann.*, t. 66, 1909).

104'. Sinigallia (L.). — Sulle equazioni differenziali lineari (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 17_2, 1908).

105. Sonine (N.). — Recherches sur les fonctions cylindriques (*Math. Ann.*, t. 16, 1880).

106. » . — Sur la généralisation d'une formule d'Abel (*Acta Math.*, t. 4, 1884).

107. Tamarkin (J. D.). — On Volterra's integro-functional equation (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. 28, 1926).

108. Tedone (O.). — Su alcune equazioni di Volterra risolubili con un numero finito di derivazioni ed integrazioni (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 23, 1914).

109. Tricomi (F.). — Equazioni integrali contenenti il valore principale di un integrale doppio (*Math. Zeits.*, t. 27, 1928).

110. Usai (G.). — Sulle soluzioni in termini finiti di equazioni integrali (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 45, 1921).

111. Vergerio (A.). — Sull' equazione integrale di Fredholm di 1a specie (*Rend. Ist. Lomb.*, 2e série, t. 47, 1914).

112. » . — Sulla risolubilità dell' equazione integrale di 1a specie (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 24, 1915).

113. » . — Una condizione necessaria e sufficiente per l'esistenza di soluzioni nell' eq. int. di 1a specie (*Id.*).

114. » . — Sulle equazioni integrali non lineari (*Rend. Circ. Mat. Palermo*, t. 41, 1916).

115. » . — Sulle equazioni integrali non lineari con operazioni funzionali singolari (*Giorn. di Mat.*, t. 59, 1921).

116. VERGERIO (A.). — Sulle equazioni integrali non lineari (*Ann. di Mat.*, 3e série, t. 31, 1922).
117. » . — Sopre un tipo di equazione integrale non lineare (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 31_1, 1922).
118. VITERBI (A.). — Sulla risoluzione approssimata delle equazioni integrali di Volterra (*Rend. Ist. Lomb.*, 2e série, t. 45, 1912).
119. VILLAT (H.). — Sur la résolution de certaines équations intégrales (*Acta Math.*, t. 40, 1916).
120. VIVANTI (G.). — *Elementi della teoria delle equazioni integrali lineari* (Hoepli, éditeur, Milan, 1916).
121. VOLTERRA (V.). — Sopra un problema di elettrostatica (*Nuovo Cimento*, 3e série, t. 16, 1884).
122. » . — Id. (*Trans. Ac. Lincei*, t. 8, 1884).
123. » . — Sulla inversione degli integrali definiti (*Atti Ac. Torino*, t. 31, 1895-1896) (équations intégrales à limites variables, quatre notes).
124. » . — Sulla inversione degli integrali definiti (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 5_1, 1896).
125. » . — Sulla inversione degli integrali multipli (*Id.*).
126. » . — Sopra alcune questioni d'inversione di integrali definiti (*Ann. di Mat.*, t. 25, 1897).
127. » . — Sul fenomeno delle Seiches (*Nuovo Cimento*, 4e série, t. 8, 1898).
128. » . — Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions (*C. R. Acad. Sc.*, Paris, t. 142, 1906).
129. » . — Sopra equazioni di tipo integrale (*Int. Congress of Math.*, Cambridge, 1912).
130. » . — *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* (Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1913).
131. » . — Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali (*Rend. Ac. Lincei*, 5e série, t. 23_1, 1914).
132. » . — Alcune osservazioni sui fenomeni ereditari (*Id.*, 6e série, t. 9, 1929).
133. VOLTERRA (V.) et PÉRÈS (J.). — *Leçons sur la composition et les fonctions permutables* (Gauthier-Villars, éditeur, Paris, 1924).
134. WEYL (H.). — Singuläre Integralgleichungen (*Math. Ann.*, t. 66, 1908).
135. WHITTAKER (E. C.). — On the numerical solution of integral equations (*Proc. R. Soc. London*, série A, t. 94, 1918).
136. ZEILON (N.). — Sur quelques points de la théorie de l'équation intégrale d'Abel (*Ark. för Mat. Astr. och Fys.*, t. 18, 1924).

INDEX DES AUTEURS CITÉS.

(Les numéros renvoient aux pages.)

Abel, 171, 172, 173, 174, 175, 219.
Adams, 209.
Alexandrof, 13.
Arzelà, 20, 110, 121, 122.
Ascoli, 20, 121, 122.

Baire, 10, 18, 26.
Bertrand (G.), 279.
Bessel, 291, 293, 301, 302.
Bôcher, 140.
Bogoliouboff (N.), 128.
Bois-Reymond (Du), 126.
Borel, XII, 9, 11, 21, 35, 332.
Bourlet, 11.

Carleman, 246, 273, 279.
Cauchy, 18, 44, 278.
Cinquini (S.), 128.
Conforto, 12.
Cotton (E.), 314.
Cramer, 134.

Daniell, 106.
Davis, X.
Del Chiaro, 128.
Dirichlet, 20, 109, 110, 137, 175, 184.

Egoroff, 273.
Euler, 95, 107, 108, 109, 124, 128, 178.
Evans, X, 150, 151, 201, 202, 203, 206.

Fabri (C.), 7.
Fantappiè, 12, 68, 69.
Fisher (E.), 295.
Fourier, 10, 11, 288, 291, 293, 294, 295, 297, 298, 304, 308, 309, 310.
Fréchet, X, XI, 12, 13, 16, 18, 19, 21, 22, 24, 25, 32, 49, 57, 58, 61, 67, 68, 71, 89, 90, 96, 108.
Freda, XII.
Fredholm, XI, 110, 131, 222, 225, 226, 232, 236, 237, 243, 244, 256, 263, 265, 266, 267, 268, 269, 271, 273, 275, 276, 277, 279, 281, 283, 284, 285, 286, 308, 311, 314, 317, 318, 320, 325, 327, 329.
Fubini, 110, 302.
Fuchs, 195, 200.

Galbrun, 336.
Gateaux, 29, 61, 102, 103, 105.
Giraud, XI, 279, 281, 283, 284.
Goursat, X, 217, 248, 257, 300.
Graves (L.-M.), 128.
Green, 97, 108, 117.

Hadamard, 26, 28, 49, 52, 53, 71, 108, 174, 227, 245.
Hahn, 128.
Hamilton, 108.
Heisenberg, 12.
Heywood, X, 248.
Hilbert, X, 12, 110, 127, 271, 285, 286, 296, 299, 302, 307.
Hille, 202, 268.
Hölder, 122, 279.
Holmgren (E. A.), X, 182, 188, 196, 197, 200, 201.

Holmgren (H.), 174.
Horn, 201.

Jacobi, 108, 109.

Kostitzin, 207.

Lagrange, 101, 128.
Laguerre, 245.
Lalesco, x, 140, 164 182, 194, 195, 196, 199, 200, 201, 209, 246, 303, 311, 312.
Laplace, 89.
Laurentieff (M.), 128.
Lauricella, 294, 308.
Lebesgue, x, 21, 31, 35, 37, 38, 39, 40, 43, 110, 111, 119, 120, 257, 273, 332.
Leray, xi, 331, 332, 333.
Le Roux, 140.
Letnikoff, 174.
Levi (Beppo), 110.
Levi Civita, 12, 310.
Lévy (Paul), x, 13, 14, 58, 59, 66, 71, 89, 100, 101, 102, 108, 333.
Liouville, 173, 174, 175.
Love, 207.

Mac Shane (E. J.), 128.
Mandelbrojt, 174.
Manià, 128.
Marty (J.), 302.
Mayer, 128.
Montel, 19.
Moore (E. H.), xi, 12, 13, 16.
Myller, 209, 213.

Naguino, 128.
Neumann (C.), 110.

Pauli, 12.
Picard (E.), 131, 140, 195, 208, 277, 308, 313, 325.
Picone, 209, 213, 314.
Pincherle, 11, 174.
Poincaré, 110, 269, 279, 280.
Pomey, 333.
Popovici, xi, 209, 210, 212, 214, 219.
Puiseux, 330.

Ricci, 12.
Riemann, 109, 174, 312.
Riesz (F.), x, 31, 45, 50, 53, 55, 56, 63, 64, 65, 77, 295.

Sabbatini, 334, 335.
Scatizzi, 174.
Schauder, 333.
Schmidt, x, xi, 12, 234, 285, 305, 306, 307, 308, 320, 321, 324, 325, 327, 331.
Schur, 246.
Schwarz, 44, 49, 110, 122.
Sinigaglia, 163.
Sonine, 175, 176, 177.
Steinhaus, 49.
Stieltjes, 14, 56, 57, 58, 59, 64, 65, 66, 77, 88, 106, 336.
Stokes, 96, 97, 99, 101.

Tamarkin, 202, 209, 221, 268.
Taylor, 9, 10, 58, 83, 85, 86, 88, 115, 118, 319.
Tedone, 151.
Tonelli (L.), x, 26, 110, 118, 120, 123, 128.
Tricomi, 279, 280.

Urysohn, 13.

Vallée-Poussin (de La), 15.
Villat, 279, 282.
Vitali, 12, 111, 125.

Weierstrass, 10, 25, 62, 63, 109, 245.
Weyl, 276.
Whittaker, 151, 177.
Wiener, 106.

Zaremba, 110.

INDEX ALPHABÉTIQUE DES MATIÈRES.

Pages.

Analyse générale 12

Approximations successives :

Application à l'équation de Fredholm 232

Application à l'équation de Volterra 140

Pour les équations intégrales non linéaires......... 313, 318

Borel-Lebesgue :

Extension du théorème de —. 21

Caractéristique d'une fonction... 167

Composition :

De deuxième espèce......... 234

De première espèce.......... 142

Équations intégrales de composition 335

Continuité :

D'une fonctionnelle.......... 23

Élémentaire, d'ordre zéro..... 27

Élémentaire, d'ordre *p*....... 29

En moyenne............... 44

Uniforme 24

Convergence :

En mesure............... 32

En moyenne............... 44

Cycle fermé :

Groupe du —............... 149

Dérivation et différentiation :

Dérivation d'ordre fractionnaire 174

Dérivation d'une fonctionnelle composée 90

Dérivées et différentielles des fonctionnelles............ 70

Dérivées et différentielles d'ordre supérieur............ 83

Deux points de vue sur les dérivées et différentielles...... 78

Différentielles de Fréchet..... 89

Inversion de deux dérivations fonctionnelles 84, 86, 98

Déterminant :

De l'équation de Fredholm... 225

D'une transformation fonctionnelle 317

Théorème de Hadamard.... 227

Diagonale :

D'une fonction............. 167

Distance :

Dans un espace abstrait..... 17

Élémentaire, d'ordre zéro.... 27

Élémentaire, d'ordre *p*...... 29

En moyenne............... 42

Ensemble :

Champs fonctionnels......... 8

Ensembles abstraits......... 12

Ensembles compacts......... 19

Ensemble dérivé fermé....... 18

Mesure d'un ensemble... 15, 36

Mesure inférieure à un nombre donné 32

Mesure nulle............... 32

Pages.

Équations aux ramifications de Schmidt 330

Équations intégrales :

D'Abel..................... 171
De Liouville................ 173
De Picard (troisième espèce)... 277
De Sonine.................. 175
Où figurent des valeurs principales d'intégrales.......... 278

Équation intégrale de Fredholm de deuxième espèce :

Équation associée........... 231
Équation homogène......... 237
Équations singulières........ 275
Intégrales multiples.......... 265
Les trois principes........... 227
Passage du fini à l'infini..... 222
Systèmes................... 263

Équation intégrale de Fredholm de première espèce.............. 308

Équations intégrales de Volterra de deuxième espèce :

A deux limites variables..... 214
Cycle fermé................. 148
Intervalle d'intégration infini. 204
Intégrales multiples.......... 151
Les trois principes.......... 136
Passage du fini à l'infini..... 133
Noyau infini........... 168, 201
Systèmes 158

Équations intégrales de Volterra de première espèce :

A deux limites variables..... 214
Cas où la diagonale du noyau à un zéro isolé............. 181
Intégrales multiples..... 156, 161
Lien avec les équations différentielles 162
Noyau infini d'ordre α....... 169
Noyau logarithmique........ 177
Passage du fini à l'infini..... 152
Réduction à une équation de deuxième espèce.......... 153
Systèmes................... 160

Pages.

Équations intégrales non linéaires :

A limites variables.......... 333
De Lalesco................. 312
Méthode générale de Volterra. 315
Procédé de Schmidt......... 324

Équations intégro-fonctionnelles :

De Picard.................. 208
Généralisations 213
Résultats de M. Popovici..... 210

Espace :

Abstrait 16
Analytique.................. 11
Complet 18
Des fonctions holomorphes de Fréchet.................. 19
Des fonctions mesurables..... 30
Distanciable 16
Fonctionnel 9
Hilbertien 11
($\mathcal{E}$) de Fréchet.............. 16

Fonctionnelles :

Analytiques 12, 69
Bilinéaires 64
Définies dans un ensemble abstrait.................. 13
Extremum 24
Linéaires 49
Normales de P. Lévy........ 66
Régulières 48, 60
Représentations de Hadamard et de Riesz pour les fonctionnelles linéaires........ 52, 55
Séries de fonctionnelles homogènes..................... 67

Fonctions :

Absolument continues........ 111
Additives 14
Arguments (Fonctions arguments) 6
D'ensemble................. 14
D'une infinité de variables... 10
D'une ligne................ 7

Pages.
D'un hyperespace........... 7
Également bornées.......... 20
Également continues......... 20
Fondamentales 243
Fondamentales de Schmidt... 305
Mesurables................. 37
Orthogonales 243
Principales................ 255
Sommables.................. 39

Genre :
Du déterminant de Fredholm 245

Inégalité de Bessel............. 291
Extension 301

Intégrale :
De Lebesgue................ 30
De Stieltjes............. 14, 56
Multiple de Stieltjes......... 66
Quasi régulière 112
Régulière, positive ou négative 112
Valeur principale d'une —... 278

Intégration des fonctionnelles :
Extension de la formule de Stokes.................. 96
Généralisation de l'intégrale multiple 101
Valeur moyenne dans l'espace fonctionnel.............. 102

Monomes fonctionnels :
Définition.................. 321
Séries régulièrement convergentes 323

Noyaux :
Ambigus.................. 299
Canoniques 259
Discontinus 266
Fermés 298
Infinis............... 166, 201
Itérés (puissances de composition)........... 136, 233, 235

Pages.
Logarithmiques............. 177
Orthogonaux 249
Positifs 299
Principaux................. 248
Résolvants......... 136, 147, 227
Symétriques 285
Symétriques gauches......... 303
Symétrisables 302

Ordre :
D'une fonction............. 167

Principe de passage du discontinu au continu................. 3

Semi-continuité :
D'une fonctionnelle...... 26, 113
Extension de la —.......... 119
Théorèmes sur les maxima et minima.............. 26, 120

Séries du type de Fourier :
Définition, constantes de Fourier......................... 291
Série convergente en moyenne. 293
Théorème de Fischer-Riesz... 295
Théorème de Hilbert........ 296
Théorème de Schmidt....... 307

Suites :
Biorthogonales et normales... 301
Orthogonales 289
Orthogonales et normales..... 289
Système orthogonal et normal complet 293

Taylor :
Extension de la formule de —. 85

Trace d'un noyau............ 244

Transformation fonctionnelle :
Et opérateur fonctionnel..... 6
Inversion 129, 316

Valeurs fondamentales :
Ou singulières, ou caractéristiques................. 243

Pages.

Variations (Calcul des) :
Équation d'Euler... 95, 107, 124
Et calcul fonctionnel........ 107
Méthode directe............. 111
Principe de Dirichlet........ 109

Voisinage :
Élémentaire, d'ordre zéro. 28, 112
Élémentaire, d'ordre *p*...... 29
En moyenne................ 44

Pages.

Weierstrass (Généralisation des théorèmes de) :
Sur les fonctions continues obtenues comme limites de polynomes 63
Sur les limites supérieure et inférieure des fonctions continues 25

TABLE DES MATIÈRES.

Pages.
Préface VII

LIVRE I.

Généralités sur les fonctionnelles.

Chapitre I.

La notion de fonctionnelle.

I. Exemple préliminaire 1
II. La notion de fonctionnelle 3
III. Champs fonctionnels 8
IV. Fonctionnelles et fonctions d'une infinité de variables 10
V. Ensembles abstraits et analyse générale 12

Chapitre II.

Continuité des fonctionnelles et questions connexes.

I. Limite et distance dans un ensemble abstrait 16

Espace (L), 16; espace distanciable, 17; espace complet, 18; ensemble compact, 19; extension du théorème de Borel-Lebesgue, 21.

II. Continuité et semi-continuité d'une fonctionnelle 23

Extremum, 24; semi-continuité, 26.

III. Le cas du calcul fonctionnel. Distances et continuités élémentaires. 27
IV. L'espace des fonctions mesurables. Digression sur l'intégrale de Lebesgue ... 30

Intégrale d'une fonction bornée, 33; fonctions sommables, 39.

V. Autre définition de la distance : distance et continuité en moyenne. 42

CHAPITRE III.

Fonctionnelles linéaires. Autres types simples de fonctionnelles.

Pages.

I. Fonctionnelles linéaires 48

Représentation de Hadamard, 52; représentation de Riesz, 55; cas de la continuité en moyenne, 58; cas de la continuité élémentaire d'ordre p, 58.

II. Fonctionnelles du second degré et de degré supérieur 59

Fonctionnelles régulières, 59; généralisation du résultat de Riesz, 63.

III. Séries de fonctionnelles homogènes 67

CHAPITRE IV.

Opérations sur les fonctionnelles.

I. Dérivée et différentielle d'une fonctionnelle 70

Dérivée fonctionnelle, 71; passage à la différentielle, 73.

II. Dérivées et différentielles d'ordre supérieur. Extension de la formule de Taylor 83

Différentielles de Fréchet, 89; dérivation d'une fonctionnelle composée, 90.

III. Exemples 93

IV. L'intégration des fonctionnelles 96

Détermination d'une fonctionnelle dont on connaît la dérivée, 96; la notion de moyenne dans l'espace fonctionnel, 101.

CHAPITRE V.

Le calcul fonctionnel et les méthodes nouvelles du Calcul des variations.

I. Remarques générales 107

II. Méthode directe pour l'étude du maximum ou minimum d'une intégrale simple 111

Semi-continuité, condition nécessaire, 113; condition suffisante, 117; extension, 119; existence du minimum, 120; l'équation d'Euler, 124.

LIVRE II.

Théorie des équations intégrales.

CHAPITRE VI.

Généralités. Équations intégrales de Volterra.

I. Préliminaire : inversion d'une transformation fonctionnelle 129

II. L'équation linéaire de Volterra de seconde espèce 132

Pages.

Problème à n inconnues correspondant, 133; passage à l'équation intégrale, 135; principes fondamentaux, 139; méthode d'approximations successives, 140; notion de composition, 142; noyau fonction de $y-x$, 148; intégrales multiples, 151.

III. Équation de Volterra de première espèce 152

K (y, y) ne s'annule pas, 153; le symbole $\overset{*}{K}^{-1}$, 155; cas des intégrales multiples, 157.

IV. Système d'équations de Volterra 158

Cas des intégrales multiples, 161.

V. Lien avec les équations différentielles 162

Chapitre VII.

Compléments aux résultats précédents. Autres types d'équations de Volterra.

I. Noyaux infinis pour $y = x$ 166

Puissances de l'unité, 168; équation de seconde espèce dont le noyau est d'ordre α, 168; équation de première espèce, 169; équation d'Abel, 171; équation de Liouville, 173; noyaux logarithmiques, 177.

II. Équations de première espèce dans le cas où la diagonale du noyau a un zéro isolé 181

Indication sur la méthode de Lalesco, 194; méthode de M. Pérès, 197; indications sur d'autres cas, 200.

III. Résultats généraux concernant les noyaux non bornés. Cas où l'intervalle d'intégration est infini 201

Noyaux absolument intégrables, 201; noyau non intégrable, 203; intervalle d'intégration infini, 204.

IV. Équations dites « intégro-fonctionnelles » 208

V. Équations de Volterra avec les deux limites de l'intégrale variables. 214

Chapitre VIII.

L'équation intégrale de Fredholm.

I. Cas limite d'un système algébrique. Sa résolution quand le déterminant n'est pas nul 222

Les trois principes, 231; l'équation associée, 231; approximations successives, 232; composition de seconde espèce, 234.

II. Cas où le déterminant est nul 236

Équations homogènes, 237; l'équation avec second membre, 241.

III. Propriétés du déterminant et du noyau résolvant 244

Série donnant log $\Delta(\lambda)$, 244; genre de $\Delta(\lambda)$, 245; relations caractérisant les noyaux résolvants, 247.

IV. Décomposition d'un noyau en noyaux principaux 248

Pages.

Noyau principal, 248; orthogonalité de noyaux, 249; équations dont le noyau est somme de noyaux orthogonaux, 250; décomposition d'un noyau, 253.

V. Décomposition d'un noyau principal en noyaux canoniques 254

Noyaux $\Sigma X_i(x) Y_i(y)$, 255; réduction du noyau principal, 257; résolvante canonique, 259; conséquences, 261.

Chapitre IX.

Compléments. Systèmes d'équations intégrales; cas des intégrales multiples. Noyaux discontinus.

I. Systèmes et équations où figurent des intégrales multiples 263

II. Noyaux discontinus 266

Approximations successives, 268; extension de la méthode de Fredholm, 269; noyaux $\frac{H(x, y)}{|y-x|^\alpha}$, 273.

III. Cas singuliers. Intégrales prises en valeurs principales 275

Équations de M. Picard, 277; valeurs principales, 278.

Chapitre X.

Noyaux spéciaux. Suites orthogonales et biorthogonales. L'équation de Fredholm de première espèce.

I. Fonctions fondamentales d'un noyau symétrique 285

II. Notion de suite orthogonale. Développements en série du type de Fourier 288

III. Autres types spéciaux de noyaux 299

Noyaux symétrisables, 302; noyaux symétriques gauches, 303.

IV. Noyau dissymétrique. Fonctions fondamentales de Schmidt 305

V. Équation de Fredholm de première espèce 308

Chapitre XI.

Les équations intégrales non linéaires.

I. Étude de quelques cas simples 311

II. Les résultats généraux de M. Volterra 315

III. Les équations de Schmidt. Cas où le déterminant n'est pas nul 320

Monomes fonctionnels, 321; équations de Schmidt, 324; unicité, 326.

IV. Déterminant nul. Équations aux ramifications 327

V. Obtention de résultats non locaux 331

VI. Cas des limites variables 333

Pages.
Bibliographie · Livre I.. 337
Livre II.. 342
Index des Auteurs cités.. 349
Index alphabétique des matières.. 351
Table des matières.. 355

VOLTERRA.

101715 Paris. — Imp. Gauthier-Villars, 55, quai des Grands-Augustins.